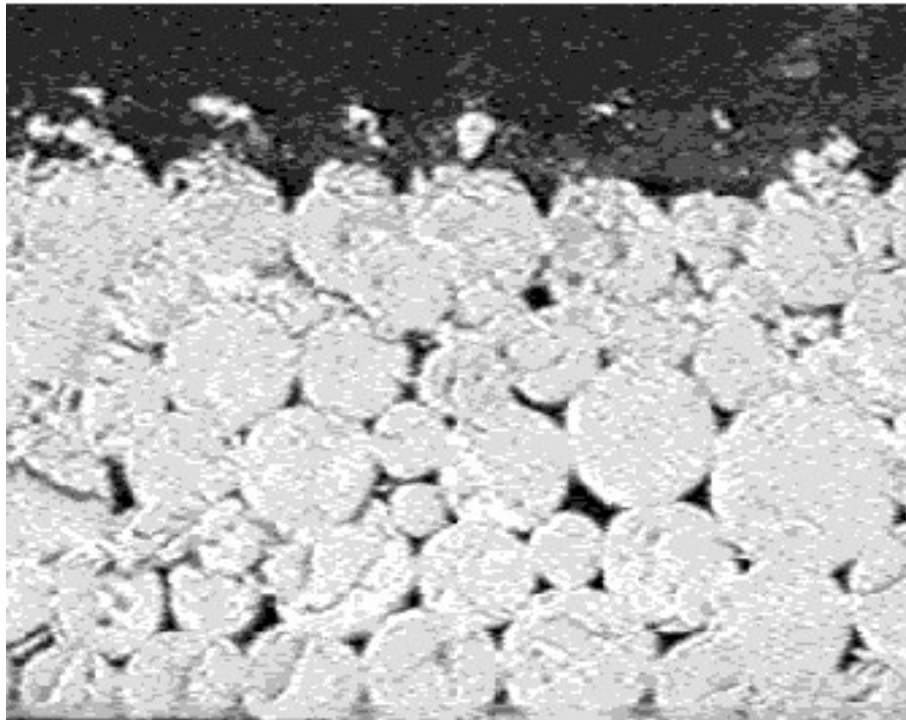


Mécanique du solide et des matériaux

Élasticité-Plasticité-Rupture



Jean-Claude Charmet

Documents concernant l'enseignement (Cours, TD, Préceptorats, TP) sur

<http://www.pmmh.espci.fr/fr/Enseignement>

Rubrique : Supports de l'enseignement de mécanique des solides

Table des matières

1	MATERIAUX	1
1.1	La Science des matériaux	1
1.2	Les matériaux	2
1.2.1	Les classes de matériaux et leurs propriétés	3
1.2.2	La liaison chimique et les propriétés mécaniques	4
1.2.3	Raideur et résistance ultime	6
1.2.4	Entre raideur et rupture	10
1.3	La mécanique des solides continus	11
1.3.1	Les essais en mécanique	11
1.3.2	L'essai de traction simple	12
1.3.3	Les modes de ruine	13
1.3.4	Hétérogénéité et anisotropie	13
1.3.5	Le Comportement mécanique des matériaux	14
2	ÉTAT MÉCANIQUE	15
2.1	Milieux déformables	15
2.1.1	Forces externes et équilibre mécanique	15
2.1.2	Forces internes, forces de surface et transmission des efforts	15
2.1.3	Raideur, rigidité, état mécanique local	16
2.2	Les contraintes	16
2.2.1	État mécanique local	16
2.2.2	Le tenseur des contraintes	18
2.2.3	Propriétés du tenseur des contraintes	20
2.2.4	Représentation des contraintes	22
2.3	La loi fondamentale de la dynamique	26
2.3.1	Equation de l'équilibre dynamique	26
2.3.2	Conditions aux limites	28
2.4	Les déformations	28
2.4.1	État local de déformation	29
2.4.2	Les grandes déformations	30
2.4.3	Les petites déformations	31
2.4.4	Le tenseur des déformations	34
2.4.5	Propriétés du tenseur des déformations	35
2.4.6	Représentation des déformations	36
2.5	Continuité et compatibilité des déformations	36
2.6	Lois de comportement : relations contraintes - déformations	37
2.7	Résumé Contraintes - Déformations	38
3	ÉLASTICITÉ	39
3.1	Le travail de déformation	39
3.1.1	Le travail virtuel de déformation	39
3.1.2	Les potentiels élastiques	40
3.1.3	Relation avec la thermodynamique	41

3.2	L'élasticité	42
3.2.1	Les deux élasticités	42
3.2.2	L'élasticité linéaire	42
3.2.3	L'élasticité linéaire isotrope	43
3.3	Les modules élastiques	43
3.3.1	Module d'Young et coefficient de Poisson	43
3.3.2	Module de Coulomb	44
3.3.3	Modules de Lamé	44
3.3.4	Modules de compressibilité et de cisaillement	44
3.4	Les équations de l'élasticité	45
3.4.1	La loi de Hooke	45
3.4.2	Les modules effectifs	46
3.4.3	L'équation de Lamé	47
3.5	Les problèmes plans	48
3.5.1	La déformation plane	48
3.5.2	La contrainte plane	49
3.5.3	Lieux caractéristiques des problèmes plans	50
3.6	Ondes et vibrations	52
3.6.1	Les ondes de volume	52
3.6.2	Barres, plaques et blocs	54
3.6.3	Les ondes de flexion	55
3.7	Théorèmes énergétiques en élasticité linéaire	57
3.7.1	Réciprocité des chargements	57
3.7.2	Théorèmes énergétiques	58
3.8	Flexion et flambement	59
3.8.1	Flexion des poutres	59
3.8.2	Flambement des poutres	62
3.9	Le contact	64
3.9.1	Le contact : phénomène mécanique local	64
3.9.2	Le contact en dimension $d = 3$	65
3.9.3	Poinçon plan rigide à base circulaire sous chargement normal	66
3.9.4	Le contact de Hertz	67
3.10	Résumé Élasticité	69
4	PLASTICITÉ	71
4.1	Le comportement plastique	71
4.1.1	Le seuil de plasticité	71
4.1.2	Influence des déformations plastiques sur les propriétés mécaniques	72
4.1.3	Le comportement plastique pur	73
4.1.4	Instabilité plastique et écoulement libre	75
4.1.5	La striction stable	77
4.2	Frontière élastique et frontière d'écoulement	77
4.2.1	La frontière élastique	77
4.2.2	La frontière d'écoulement	79
4.3	Critères de plasticité et d'écoulement	80
4.3.1	Effet d'une pression isotrope	81
4.3.2	Symétries du domaine de résistance	81
4.3.3	Critère de Tresca et Courbe intrinsèque de Caquot	82
4.3.4	Critères de Von Misès et Coulomb	83
4.4	Les équations de la plasticité	84
4.4.1	Les matériaux ductiles	85
4.4.2	Chargement radial et déformation simple	87
4.4.3	Loi de Hooke généralisée	88
4.4.4	Travail plastique	89

4.5	La plasticité à l'échelle microscopique	91
4.5.1	Le glissement dans un monocristal	91
4.5.2	Les dislocations	93
4.5.3	Action d'un champ de contrainte externe sur une dislocations	98
4.5.4	Obstacles intrinsèques au mouvement des dislocations	102
4.5.5	Obstacles externes au mouvement des dislocations	106
4.5.6	Vers la plasticité macroscopique	107
4.6	Résumé Plasticité	109
5	RUPTURE	111
5.1	Résistance théorique à la rupture	112
5.1.1	La contrainte théorique de clivage	112
5.1.2	L'énergie superficielle des solides	113
5.1.3	L'effet d'échelle	113
5.2	Approche en force et en contrainte	114
5.2.1	Le coefficient de concentration des contraintes	115
5.2.2	La contrainte de rupture effective	116
5.3	La rupture fragile	116
5.3.1	Fissure et modes de rupture	116
5.3.2	Les phases de chargement	117
5.3.3	Les hypothèses du modèle de rupture fragile	117
5.3.4	Le modèle de rupture fragile	118
5.3.5	Coefficient de concentration k et facteur d'intensité K	118
5.4	La correction d'élasto-plasticité	119
5.4.1	Autonomie de la zone critique	119
5.4.2	Modèle d'Irwin en plasticité confinée	119
5.4.3	Modèle de Barenblatt	120
5.5	La ténacité des matériaux	121
5.5.1	Condition d'amorçage	121
5.5.2	La ténacité théorique	122
5.5.3	Le paradoxe de la ténacité	122
5.5.4	La ténacité effective	122
5.6	Approche énergétique	123
5.6.1	Critère énergétique pour la rupture brutale	124
5.6.2	Le bilan d'énergie	124
5.6.3	Condition d'amorçage et taux de restitution de l'énergie	125
5.6.4	Stabilité et propagation	125
5.6.5	Courbe d'équilibre d'une fissure	126
5.6.6	Influence du type de chargement	126
5.7	La longueur de Griffith	127
5.7.1	Taux de restitution d'énergie	128
5.7.2	Énergie de fissuration et longueur absolue	129
5.7.3	Énergie de fissuration et ténacité : La relation entre G_C et K_C	130
5.8	La propagation des fissures	131
5.8.1	La courbe d'équilibre et la propagation contrôlée	132
5.8.2	La stabilité de la propagation	132
5.8.3	Influence du type de chargement	133
5.9	Les mécanismes de la rupture brutale	134
5.9.1	Le déchirement ductile des métaux	134
5.9.2	Le clivage fragile des céramiques	135
5.10	La résistance à la rupture des matériaux fragiles	136
5.10.1	Résistance à la rupture	136
5.10.2	La statistique de la rupture fragile	138
5.11	Résumé Rupture	141

A	Propriétés mécaniques des matériaux	143
A.1	Températures de fusion et de ramollissement(*) en °K	144
A.2	Masse volumique en $kg.m^{-3}$	145
A.3	Echelles de structure des matériaux	146
A.4	Module d'Young en Gpa	147
A.5	Limite d'élasticité R_e et résistance à la traction R_m	148
A.6	Limite d'élasticité normalisée : $\frac{R_e}{E}$	149
A.7	Ductilité en traction - allongement à rupture A_R en %	150
A.8	Ténacité K_C en $MPa.m^{1/2}$ à l'ambiante	151
A.9	Energie de rupture G_C en $kJ.m^{-2}$ à l'ambiante	152
B	Opérateurs différentiels - Formulaire	153
B.1	Coordonnées cartésiennes	154
B.1.1	Scalaire ϕ	154
B.1.2	Vecteur u	154
B.1.3	Contrainte $\bar{\sigma}$ et Déformation $\bar{\varepsilon}$	154
B.2	Coordonnées polaires	155
B.2.1	Scalaire ϕ	155
B.2.2	Vecteur u	155
B.2.3	Contrainte $\bar{\sigma}$ et Déformation $\bar{\varepsilon}$	155
B.3	Coordonnées sphériques	156
B.3.1	Scalaire ϕ	156
B.3.2	Vecteur u	156
B.3.3	Contrainte $\bar{\sigma}$ et Déformation $\bar{\varepsilon}$	156
C	Bibliographie	157

Chapitre 1

MATERIAUX

1.1 La Science des matériaux

Alors que la résistance des structures et des matériaux est un domaine qui nous concerne tous dans notre vie quotidienne, elle est restée pendant des siècles le parent pauvre des “Sciences”. Essayer de comprendre pourquoi se produisent des catastrophes telles que l’effondrement d’un pont ou la rupture d’un barrage était le lot des hommes de l’art dont les connaissances étaient surtout affaire d’empirisme et de tradition.

C’est en 1638, sur la fin de sa vie, que Galilée (1564-1642) publia son “*Dialoghi delle due nuove scienze*”, premier ouvrage publié qui traitait sérieusement de résistance mécanique. Il étudia l’influence de la section sur la résistance statique des tiges, montrant que la charge de rupture était bien proportionnelle à l’aire de la section droite, et s’intéressa aussi, avec plus ou moins de bonheur (il ne pouvait bénéficier des travaux de Isaac Newton (1642-1727) sur le principe de l’action et de la réaction), à la résistance en flexion de divers types de poutres.

Alors qu’il partageait avec les Grecs leur mépris pour les Sciences appliquées, Isaac Newton y apporta deux outils d’importance primordiale : le calcul différentiel et sa troisième loi, plus connue sous le nom de “Principe de l’action et de la réaction”. Cette loi stipule que si un corps pesant exerce sur un corps support une force due à l’action de la pesanteur (contact statique) ou à celle de l’accélération (contact dynamique), ce support exerce en sens inverse une force de réaction égale et opposée sur le corps pesant. Si les lois de Newton nous donnent les forces auxquelles une structure peut être soumise, elle ne nous donne aucune information sur les forces de réaction au sein des matériaux qui la compose.

Comment et pourquoi la structure résiste-t-elle ? La réponse fut donnée par Robert Hooke (1635-1703). Étudiant l’allongement produit par l’action de charges croissantes appliquées sur divers matériaux, il établit une relation de proportionnalité, dans la limite de précision des mesures de l’époque, et il formula la loi de l’élasticité qui porte son nom en 1679 dans son traité “*De potentia restituta*” sous la forme “*Ut tensio, sic vis*”. Telle tension, telle force, car en latin *tensio* signifie généralement *étirement* et non *tension* - au sens de force - bien que les romains aient souvent confondu les deux acceptions. Nous savons aujourd’hui que cette loi s’applique bien à presque tous les solides usuels (cristallins ou amorphes) aux faibles contraintes mais que les matériaux constitutifs des structures biologiques la suivent rarement. Cependant, pour les structures et les matériaux usuels, elle joue un rôle essentiel.

Malgré leur richesse, les idées de Hooke ne débouchèrent que cent ans plus tard sous la forme des concepts de *Contrainte* et de *Déformation* introduits par Augustin Cauchy (1789-1857). Bien que recouvrant des notions très simples ces deux termes restent souvent mystérieux et rebutants. Jusqu’alors les études avaient porté sur des structures plus ou moins élaborées pour lesquelles les analyses en terme d’allongement et de force ne distinguaient pas ce qui était la contribution de la géométrie de la structure de celle intrinsèque au matériau. La définition de l’état mécanique local en terme de contrainte et de déformation a véritablement sorti la Science des Matériaux de l’impasse.

L’idée qu’un matériau puisse être caractérisé par une rigidité intrinsèque est due à Thomas Young (1773-1829) qui démontrait ainsi que la déformation globale d’une structure résulte en fait de la combinaison de la raideur du matériau et de la taille et de la forme de cette structure. Cependant on doit à Henri Navier (1785-1836) d’avoir formulé mathématiquement le concept développé par Thomas

Young, en s'appuyant sur les notions de déformation et de contrainte formulées par Augustin Cauchy. Les bases étaient posées pour entreprendre la résolution analytique des problèmes de calcul des structures.

Fort de ces progrès, le début du XIXe siècle fut la période privilégiée des tentatives de prédiction des résistances pratiques des matériaux à partir des connaissances acquises sur les forces des liaisons interatomiques et des catastrophes, les résultats obtenus s'écartant de plusieurs ordres de grandeur des valeurs expérimentales. Il fallut attendre plus d'un siècle pour voir se dessiner une approche satisfaisante des mécanismes comportementaux au delà de la zone élastique : ductilité et plasticité, fragilité et rupture. En effet, ce n'est qu'en 1920 que A. Griffith publia son article révolutionnaire sur la résistance à la rupture des solides. et ce n'est qu'en 1934 que Geoffrey Taylor suggéra l'existence de dislocations dans les cristaux pour interpréter les propriétés de ductilité des métaux purs.

La Science des Matériaux disposait enfin des outils conceptuels nécessaires à son développement. Les travaux de Griffith et de Taylor sont à la base des méthodes d'élaboration de nos matériaux *modernes*. Le développement conjoint des nouveaux matériaux et des moyens de calcul par éléments finis permet aujourd'hui aux ingénieurs de concevoir des structures mécaniquement fiables de plus en plus complexes comme en témoignent les réalisations de haute technologie du pont de Normandie ou du viaduc de Millau pour ne citer que le domaine des ouvrages d'art.

1.2 Les matériaux

Le physico-chimiste étudie les propriétés de la matière, métaux, alliages, verres, polymères, tissus biologiques,...mais ne s'occupe que rarement des matériaux correspondants. Les matériaux sont de la matière travaillées par l'homme pour fabriquer des objets. Le process d'élaboration procure au matériau une certaine microstructure qui à son tour détermine ses propriétés chimiques, physiques, mécaniques, électriques, thermiques. Il s'agit là des propriétés intrinsèques du matériau. La synthèse des matériaux en laboratoire s'appuie sur la trilogie *mise en oeuvre- structure - propriétés* :

Procédés de fabrication	Coulée, frittage, dépôts (électrolytique,...)
Mise en forme par déformation	Laminage, extrusion, étirage, forgeage, emboutissage, martelage, ...
Mise en forme par enlèvement de matière	Usinage, rectification, découpe (chalumeau, laser, jet d'eau), électroérosion, ...
Traitements thermiques	Recuit, trempe, vieillissement, revenu, ...
Assemblage	Soudage, collage, rivetage, boulonnage, vissage, fretage, ...
Traitement de surface	Grenaillage, rodage, trempe superficielle, revêtement par dépôt (électrolytique, phase vapeur, projection, ...)
...	

TAB. 1.1 – Procédés de mise en oeuvre

Type de Liaison, Molécules	Type et taille
Système cristallin, Ordre	à longue et courte distance
Polymères	Taux de réticulation et de cristallinité
Hétérogénéités chimiques	Ségrégation aux joints de grains
Précipités cohérents, incohérents	Dimension, forme, fraction volumique
Composites	Plis, fibres (courtes longues trichytes)
Texture, Porosité	
...	

TAB. 1.2 – Microstructure

Mécaniques	Modules et limites élastiques, écrouissage (contrainte d'écoulement), charge à la rupture, vitesse de fluage, ductilité, allongement réparti, à rupture, taux de striction, viscosité, capacité d'amortissement, dureté, résistance (fatigue, usure, abrasion, ...) ...
------------	---

TAB. 1.3 – Propriétés mécaniques

1.2.1 Les classes de matériaux et leurs propriétés

L'*ingénieur* groupe les matériaux en trois classes correspondant approximativement à trois types de comportement.

<i>Matériaux</i>	<i>Comportement</i>	<i>Propriétés</i>
Verres et céramiques	Dureté et fragilité	Isolants et réfractaires
Métaux et Alliages	Ductilité	Conducteurs et Réflecteurs
Polymères	Déformabilité	

TAB. 1.4 – Les trois classes de matériaux

Cette classification recoupe celle des matériaux en fonction de leur type de *liaison chimique*. Ce résultat n'est pas fortuit dans la mesure où une grande partie des propriétés physiques et en particulier des propriétés mécaniques sont conditionnées par les propriétés des liaisons chimiques.

Liaison covalente	
Bore	Fibres
Carbone diamant	Poudres abrasives - fibres
Silicium - germanium	Composants électroniques
Carbures - nitrures	Meules, paliers, fibres réfractaires
Polymères	Thermodurcissables
Liaison ionique	
Alumine, silice, zircon	Abrasifs, réfractaires
Verres	Vitres, emballages, fibres
Oxydes et carbures d'uranium	Industrie nucléaire
Liaison métallique	
Aluminium	Alliages légers
Zinc	Bâtiment, fonderie
Titane	Aéronautique
Zirconium	Industrie chimique, gaines combustible nucléaire
Cuivre	Laitons, bronzes
Or, Argent	Monnaies, brasures, photographie, contacts
Etain, Plomb	Plomberie, soudure
Tantale	Réfractaire, électronique
Fer, Cobalt, Nickel	Aciers, fontes, superalliages
Chaînes covalentes avec liaisons Van der Waals ou Hydrogène	
Polymères	Thermoplastiques
Elastomères	
Bois, Papiers, Cartons	
Ciments, Bétons	

TAB. 1.5 – Matériaux et type de liaisons chimiques

A ces trois classes s'ajoute la classe des composites qui permet une grande souplesse de combinaisons de propriétés.

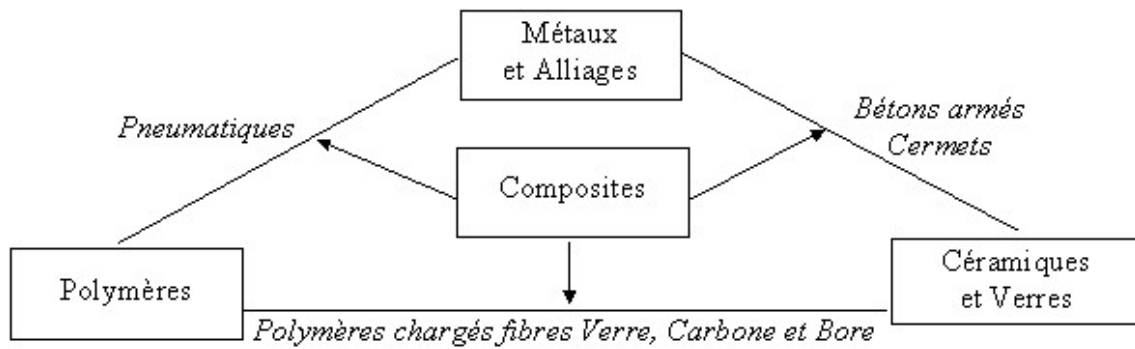


FIG. 1.1 – La classe des matériaux composites

1.2.2 La liaison chimique et les propriétés mécaniques

Pour résister aux efforts qui lui sont appliqués un matériau n'a d'autre ressource que de se déformer de manière à stocker ou à dissiper l'énergie qui lui est fournie. Dans les matériaux cristallins la déformation est associée à de légères variations des distances interatomiques, mais elles entraînent des variations considérables de l'énergie de cohésion (énergie interne). Ainsi, pour comprendre les caractéristiques mécaniques des matériaux comme leur module il faut descendre à l'échelle atomique. Deux facteurs ont un effet prépondérant sur ces propriétés :

Les forces qui retiennent les atomes les uns aux autres (les liaisons atomiques). Elles agissent comme de petits ressorts qui lient un atome à ses proches voisins dans l'état solide.

La manière dont les atomes sont empilés (l'empilement atomique) qui va déterminer le nombre de ressorts par unité de surface et l'angle sous lequel ils sont étirés.

Les liaisons atomiques

Les propriétés des matériaux sont fortement corrélées au type de liaison entre atomes car il détermine l'énergie de cohésion de la matière, la force nécessaire pour écarter les atomes les uns des autres jusqu'à rupture, le coefficient de dilatation, la conductibilité électrique ou thermique, la stabilité des phases, la réactivité, ... Le chimiste distingue deux types de liaisons : les liaisons **fortes** (*ionique, covalente et métallique*) toutes assez résistantes qui se désagrègent entre 1000 et 5000 °K et les liaisons **faibles** ou **secondaires** (*Van der Waals et hydrogène*) relativement faibles qui fondent entre 100 et 500 °K.

La température de fusion du corps est un bon indicateur de la résistance de ses liaisons

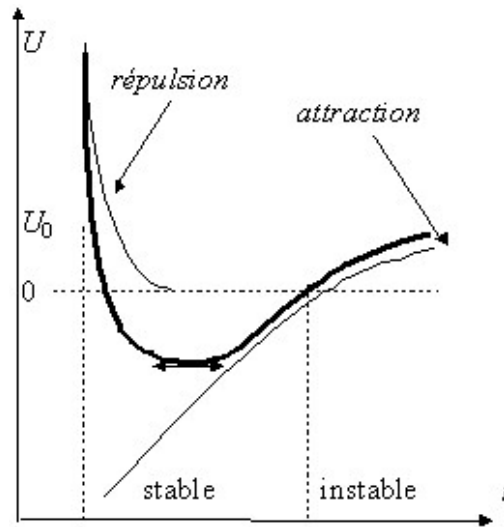
Liaisons	Ionique ou Covalente	Métallique	Van der Waals
Energie	10	5	0,1

TAB. 1.6 – Energie de liaison typique en eV/atome

La cohésion des métaux et des céramiques est entièrement due à des liaisons fortes, covalentes et ioniques pour les céramiques, métalliques et covalentes pour les métaux. Ces liaisons fortes et rigides se caractérisent par des modules mécaniques élevés.

Bien que beaucoup plus faibles, les liaisons secondaires n'en sont pas moins importantes. Elles sont responsables de liens entre les molécules de polymères, leur permettant d'exister à l'état solide. Sans elles, l'eau bouillirait à -80°C et la vie sur terre n'existerait pas.

Il faut cependant garder à l'esprit que de nombreux atomes sont retenus les uns aux autres par des liaisons mixtes qui combinent plusieurs sortes de liaisons élémentaires. Ainsi le carbone *graphite*

FIG. 1.2 – L'énergie de liaison U (potentiel de Lennard-Jones)

possède des liaisons de *covalence* et des électrons libres lui conférant un caractère *métallique* et les *oxydes réfractaires* possèdent des liaisons *ioniques partiellement covalentes*.

La longueur d'équilibre r_0 d'une liaison résulte de la compétition entre un terme répulsif $U_R = \frac{B}{r^n}$ (avec n compris entre 6 et 12) résultant de l'interpénétration des distributions de charges électroniques et un terme attractif $U_A = -\frac{A}{r^m}$ (avec $m < n$). L'énergie de liaison U (potentiel de Lennard-Jones) est fonction de la distance r entre atomes :

$$U = U_R + U_A = \frac{B}{r^n} - \frac{A}{r^m} \quad (1.1)$$

La liaison ionique La liaison ionique est une liaison forte dont le terme attractif est d'origine Coulombienne $U_A = -\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 r^2}$. Elle assure la cohésion des halogénures d'alcalins comme NaCl et partiellement celle des oxydes (magnésie, alumine, ...) et des constituants du ciment (carbonates hydratés). Les électrons de chaque ion évoluent dans des domaines complexes (les orbitales) autour du noyau. En première approximation les ions peuvent être supposés sphériques et, à condition de respecter la nullité de la charge totale, la tolérance d'empilement des ions les uns autour des autres est élevée : *la liaison ionique n'est pas directionnelle*.

La liaison covalente est une liaison forte très stable dont le terme attractif provient de la mise en commun d'orbitales électroniques. Dans la plupart des atomes, les électrons mis en commun occupent des régions bien définies de l'espace et leur recouvrement (orbitales à fort degré de symétrie) conduit au *caractère directionnel de la liaison covalente* qui détermine à son tour la manière dont s'empilent les atomes dans les cristaux. Pure, on la rencontre dans le diamant, le silicium et le germanium dont les modules sont élevés (celui du diamant est le plus grand connu). C'est la liaison dominante des céramiques au silicium et du verre (pierres, poteries, briques, verres ordinaires et constituants du ciment). Elle contribue aussi à la cohésion des métaux à température de fusion élevée (tungstène, molybdène, tantale, ...). C'est également la liaison des atomes de C des chaînes carbonées de polymères. Ces derniers comportant également des liaisons faibles, leurs modules sont généralement petits.

La liaison métallique est une liaison forte délocalisée. C'est la liaison principale (mais pas unique) des métaux et de leurs alliages. Dans un métal les électrons d'énergie élevée ont tendance à quitter leurs atomes d'origine (qui se transforment en ions) pour former un gaz d'électrons plus ou moins libres ce qui explique la conductivité électrique élevée des métaux. De ce fait, la liaison métallique n'est pas directionnelle et les ions métalliques ont tendance à s'empiler en structures simples et denses (comme des billes rangées dans une boîte).

Les liaisons de type Van der Waals sont des liaisons faibles dont le terme attractif entre atomes électriquement neutres est d'origine dipolaire et varie en r^{-6} . Si la symétrie des charges d'un

atome existe en moyenne dans le temps (neutralité électrique), la distribution instantanée autour du noyau ne l'est pas, créant un moment dipolaire aléatoire. Ce moment induit un moment similaire sur un atome voisin et les deux dipôles ainsi formés s'attirent. Ce sont ces liaisons qui sont responsables de l'état liquide des gaz à basse température, lorsque l'agitation thermique est trop faible pour les rompre, et la glace n'existe que grâce aux liaisons hydrogène.

C'est par la formation de liaisons fortes et faibles que la matière se condense pour passer de l'état gazeux à l'état liquide ou solide. Les liaisons faibles des liquides ordinaires ont fondu ; pour cette raison ils opposent une forte résistance à la compression mais faible à la traction ou au cisaillement. Leur module de compressibilité K est grand devant celui des gaz, mais leur module de cisaillement G et leur module d'Young E sont nuls. De manière générale les modules dépendent de l'état des liaisons (solides ou fondus) et de la structure de la matière.

État	Liaisons		Modules	
	Faibles	Fortes	K	G et E
Liquides	rompues	—	grand	nuls ($E = G = 0$)
Cristaux liquides	rompues	—	grand	quasi nuls ($E \simeq G \simeq 0$)
Caoutchoucs	établies	établies	grand	petits ($E \simeq G \ll K$)
Verres	—	établies	grand	grands ($E \simeq G \simeq K$)
Cristaux	—	établies	grand	grands ($E \simeq G \simeq K$)

TAB. 1.7 – Liaisons chimiques et états de la matière

L'empilement des atomes

La façon dont les atomes sont empilés est également une donnée importante pour déterminer les propriétés mécaniques des matériaux. De nombreux matériaux (presque tous les métaux et céramiques) sont constitués d'un assemblage de petits cristaux dans lesquels les atomes sont empilés en une structure régulière répétée dans les trois dimensions. Les cristaux les plus simples peuvent être modélisés en assimilant les atomes à des sphères dures. Il s'agit là cependant d'une simplification considérable quoique commode. En simplifiant encore plus un corps pur avec une seule taille de sphères dures aux liaisons non directives aura tendance à s'organiser en une structure compacte où les sphères sont rangées sans contrainte autre que géométrique. Le Cuivre est un bon exemple de matériau répondant à ces conditions. Les caractéristiques principales de l'empilement atomique s'expriment au travers de la masse volumique du matériau qui est l'expression de la masse et du diamètre des atomes constituants, mais aussi de la densité de l'empilement dans le cristal. La plupart des métaux ont de fortes densités parce que leurs atomes sont lourds et empilés de façon compacte.

Les verres minéraux sont constitués d'oxydes (comme SiO_2) *amorphes* dans lesquels l'empilement n'est pas cristallin. Ainsi, la silice vitreuse, du fait des liaisons covalentes $Si - O$ reste solide bien au dessus de $1000^\circ C$. L'ajout de Na_2O diminue la rigidité de la structure et abaisse la température de ramollissement (à laquelle on peut travailler le verre sodique usuel des bouteilles et des vitres) aux alentours de $700^\circ C$ en brisant une partie des liaisons covalentes.

La masse volumique des polymères et de nombreuses céramique est plus faible que celle des métaux parce que les atomes constituants (C , H , O) sont plus légers et qu'ils adoptent des structures d'empilement non compact (*cf.* annexe A.2).

1.2.3 Raideur et résistance ultime

La connaissance du potentiel de Lennard-Jones (1.1) permet de calculer la force interatomique $F = \frac{dU}{dr}$ et la longueur au repos $r_0 (F = 0)$ de la liaison qui correspond au minimum de l'énergie U de la liaison. Lorsque l'on étire la liaison la force croît progressivement jusqu'à la valeur maximale F_M pour une longueur r_M correspondant à la dissociation de la liaison qui se produit au point d'inflexion de la courbe $U(r)$. La pente $S = \frac{dF}{dr}$ de la courbe $F(r)$ définit la raideur de la liaison. Au repos, $F = 0$ et $r = r_0$, elle a pour valeur $S_0 = \frac{d^2U}{dr^2}|_{r_0}$.

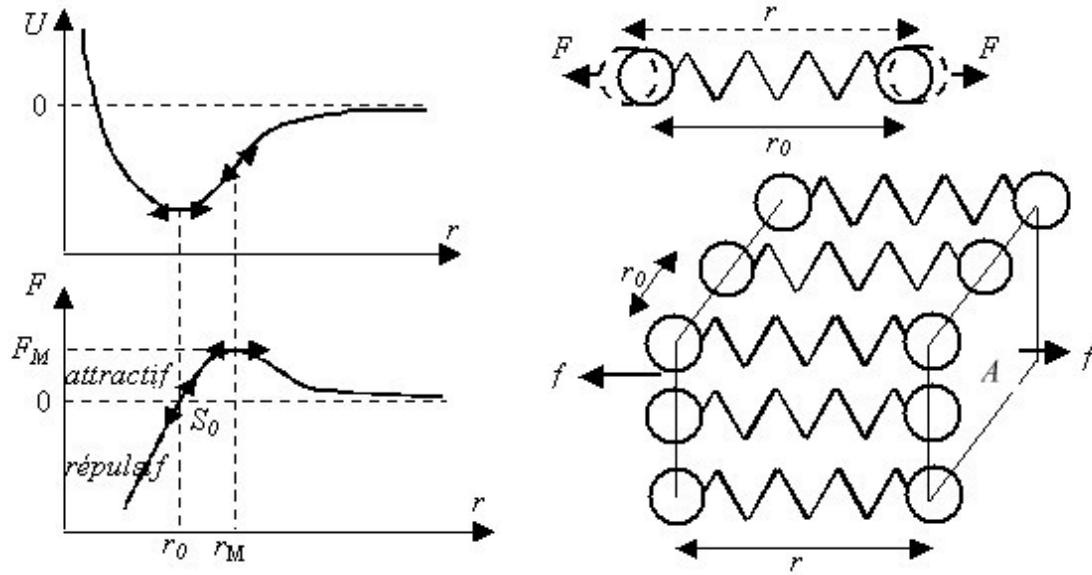


FIG. 1.3 – Énergie et résistance d'une liaison

Elle *augmente* depuis cette valeur lorsque la liaison est de plus en plus *comprimée*, traduisant la résistance de plus en plus grande du matériau à la compression hydrostatique. Au contraire, lorsque la liaison est *étirée*, sa raideur *diminue* jusqu'à s'annuler au point de dissociation $r = r_M$ où la liaison ne présente plus de résistance à la traction. Pour de *faibles* variations $r - r_0$ de la longueur de la liaison autour de sa valeur d'équilibre $r = r_0$, la force de résistance $F = S_0(r - r_0)$ varie donc linéairement avec $r - r_0$ pour tous les matériaux. On peut donc calculer la valeur S_0 de la raideur de la liaison en fonction de sa nature à partir de courbes théoriques $U(r)$. C'est le domaine de la physique du solide et de la chimie quantique.

Type de liaison	S_0 ($N.m^{-1}$)	$E = \frac{S_0}{r_0}$ (Gpa)
Covalentes, liaison $C - C$	180	1000
Ionique pure (<i>i.e</i> Na-Cl)	9 - 21	30 - 70
Métallique pure (<i>i.e</i> Cu-Cu)	15 - 40	30 - 150
Hydrogène (<i>i.e</i> $H_2O - H_2O$)	2	8
Van der Waals (cires, polymères)	1	2

TAB. 1.8 – Raideurs de liaisons : valeur typiques

La cohésion d'un matériau cristallin étant assurée par les liaisons interatomiques, leur raideur permet théoriquement de calculer les modules élastiques du matériau à condition de prendre en compte la structure cristalline qui va définir les directions des liaisons par rapport à l'effort appliqué d'où un comportement généralement anisotrope.

Pour passer de la raideur microscopique (liaison) à la raideur macroscopique (module d'Young E) associé à chaque type de liaison, donc à chaque classe de matériau, considérons le modèle simple dans lequel tous les atomes sont situés sur un réseau cubique (*cf.* Fig. 1.3). $N = \frac{A}{r_0^2}$ étant le nombre de liaisons qui traversent une section droite d'aire A normale à la force macroscopique appliquée f , la résistance à la traction microscopique de chaque liaison faiblement étirée de r_0 à r étant $F = S_0(r - r_0)$, la force macroscopique appliquée est donc $f = NF = A \frac{S_0}{r_0} \frac{r - r_0}{r_0}$. Réécrite en terme de contrainte, densité surfacique de force $\sigma = \frac{f}{A}$ et de déformation, variation relative d'allongement $\varepsilon = \frac{r - r_0}{r_0}$, cette relation devient $\sigma = \frac{S_0}{r_0} \varepsilon$. Soit l'expression du module d'Young $E = \frac{\sigma}{\varepsilon}$ caractérisant la raideur macroscopique en fonction de la raideur microscopique $E = \frac{S_0}{r_0}$.

En comparant les ordres de grandeur ainsi calculés (Tab. 1.8) avec les valeurs mesurées (*cf.* annexe A.4),

on constate un bon accord pour les matériaux cristallins : céramiques et métaux. On peut également noter la très bonne corrélation entre les valeurs des modules élastiques et les températures de fusion des matériaux (*cf.* annexe A.1) qui traduisent bien la résistance des liaisons. Ainsi le diamant qui présente le plus fort module d'Young connu est aussi le matériau dont la température de fusion est la plus élevée.

Le modèle précédent permet également d'estimer la limite théorique de résistance ultime à la traction σ_M d'un matériau en fonction de son type de liaison. C'est la contrainte associée à la force F_M qui conduit à la dissociation de la liaison au maximum de la courbe $F(r)$, donc au point d'inflexion de la courbe $U(r)$ ou encore à la valeur $S = 0$ de la raideur. Il lui correspond une déformation maximale ε_M associée à la longueur maximale r_M d'extension de la liaison.

$$\frac{\sigma_M}{E} = \frac{1}{n+1} \frac{m+1}{n+1}^{\frac{m+1}{n-m}} \quad \varepsilon_M = \frac{n+1}{m+1}^{\frac{1}{n-m}} - 1 \quad (1.2)$$

Pour un cristal ionique, $m=1$ et $n=9$, la limite ultime à la traction est $\sigma_M \simeq \frac{E}{15}$ et la déformation $\varepsilon_M \simeq 20\%$. En faisant varier m de 1 à 6 et n de 6 à 12, le rapport $\frac{\sigma_M}{E}$ varie assez peu, entre $\frac{1}{10}$ et $\frac{1}{25}$ et ε_M varie entre 10 et 30%.

Le cas particulier des polymères

D'après (Tab. 1.8) tous les matériaux véritablement à l'état solide devraient avoir des modules élastiques supérieurs à la valeur minimale calculée de 2 GPa. Or, pour la classe des matériaux polymères, les estimations basées sur la raideur des liaisons présentent une divergence de plusieurs ordres de grandeur par rapport aux valeurs mesurées. Ceci provient de leur structure particulière. Les polymères sont constitués de très longues molécules. Bien que les atomes qui en constituent le squelette (généralement composé d'atomes de carbone) soient liés par des liaisons covalentes rigides, la longueur de ces chaînes les rend flexibles et, selon les conditions, ces chaînes s'arrangent

- au hasard et non en structures périodiques tridimensionnelles (polymères amorphes)
- se replient les unes sur les autres de manière symétrique et régulière à la manière d'une rame de papier informatique (polymères cristallins)
- ou présentent une structure mixte contenant à la fois des zones amorphes et des zones cristallisées.

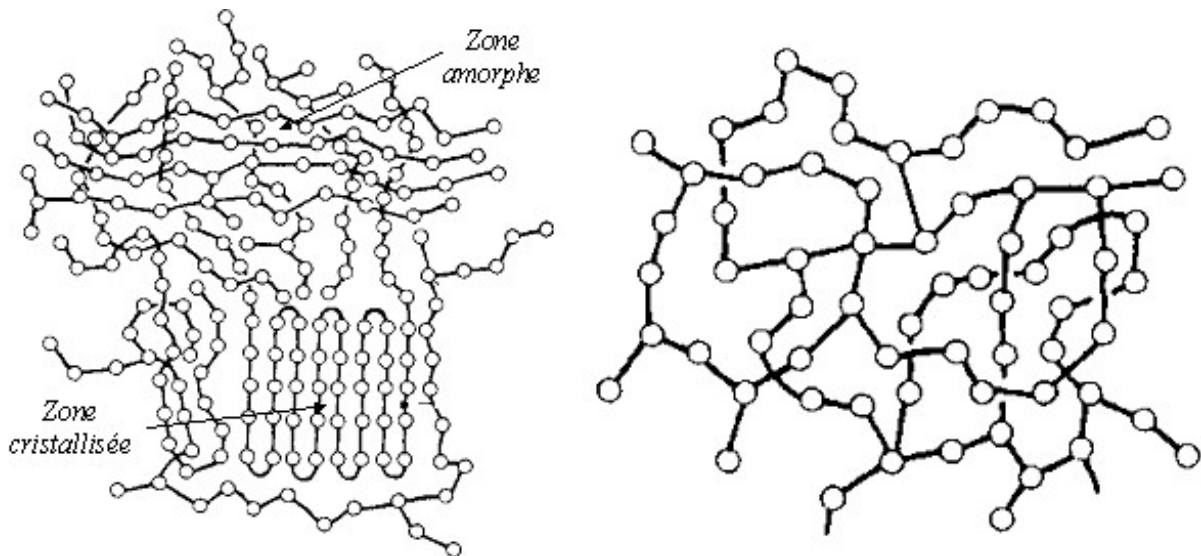


FIG. 1.4 – Structure des polymères

- à gauche : *amorphe* partiellement *cristallisé*
- à droite : fortement *réticulé* par de nombreux ponts *covalents* interchaînes

Leurs propriétés mécaniques sont conditionnée par l'indice de cristallinité, le degré de pontage entre les chaînes et la densité des liaisons faibles interchaînes de type Van der Waals. Les liaisons le long du squelette des macromolécules et les pontages occasionnels entre chaînes (liaisons covalentes très

raides) ne participent que très peu à la raideur globale, sauf à très forte déformation lorsque toutes les chaînes sont complètement étirées. Ce sont les liaisons secondaires faibles (inter-chaînes de type Van der Waals) qui contrôlent les propriétés mécaniques des polymères.

Or la densité des liaisons faibles inter-chaînes étant une fonction de la température, la température de fusion du matériau doit être remplacée par la température de transition vitreuse T_g qui caractérise la transition entre un état normal basse température ($T < T_g$) dans lequel les liaisons faibles sont établies et un état fondu haute température ($T > T_g$) dans lequel les liaisons secondaires ont fondu.

La plupart des polymères très flexibles ont *partiellement fondu* à l'ambiante. Au delà de T_g les po-

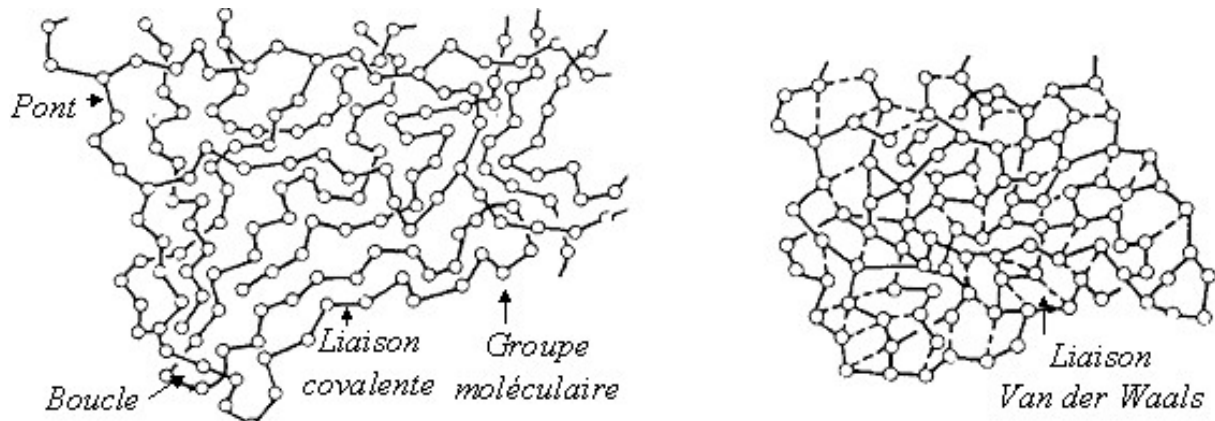


FIG. 1.5 – Influence de T_g sur la structure des élastomères

- à gauche : *amorphe* à $T > T_g$ pontage inter-chaînes covalents occasionnels
- à droite : à $T < T_g$ liaisons *Van der Waals* secondaires inter-chaînes établies au niveau des groupes

lymères *non pontés fondent* complètement et deviennent des *liquides visqueux*, les polymères *réticulés* deviennent viscoélastiques (PVC) ou *caoutchouteux* (Polystyrène butadiène). Cette fusion des liaisons secondaires est la cause de leurs propriétés mécaniques particulières comme par exemple la formabilité du polyéthylène ou la grande déformabilité élastique du caoutchouc. Sous contrainte les chaînes peuvent alors facilement glisser les unes sur les autres partout où il n'y a pas de pont, ce qui explique la grande déformabilité et la faible valeur des modules élastiques des polymères à l'ambiante.

Par contre, en dessous de T_g les polymères sont de véritables solides de module élastique ≥ 2 GPa. Leur module est élevé par suite de la formation de ponts Van der Waals dont la densité avoisine 1. La simple expérience qui consiste à refroidir un morceau de caoutchouc à la température de l'azote liquide permet de rendre compte de la qualité de la prédiction théorique. En effet ce dernier devient alors rigide (et cassant) et son module passe rapidement d'une valeur 1 MPa à une valeur normale d'environ 4 GPa.

L'autre paramètre qui caractérise le comportement mécanique des polymères est leur degré de réticulation qui mesure la densité de ponts covalents inter-chaînes. La rigidité des polymères augmente corrélativement à l'augmentation de leur *taux de réticulation* pour tendre vers la limite du diamant que l'on peut considérer comme un polymère dont toutes les liaisons sont pontées. Les polymères les plus rigides ont aujourd'hui des modules comparables à celui de l'aluminium. Le module d'Young est donc une fonction croissante de la densité de ponts covalents, même pour les caoutchoucs au dessus de la température de transition vitreuse, en dessous de T_g leur module étant élevé par suite de la formation de ponts Van der Waals dont la densité avoisine 1 (cf. Fig. 1.6).

La haute élasticité caoutchoutique

Pour les matériaux tels que les *élastomères* et les tissus biologiques, les conformations des chaînes macromoléculaires peuvent être considérablement modifiées par les déformations quasiment sans variation des distances interatomiques et le comportement du matériau résulte de la variation de résistance au changement de conformation des macromolécules, désenchevêtrement, étirement, alignement, responsables de la *haute élasticité caoutchoutique*, élasticité d'origine entropique. La déformation se produit quasiment à contrainte constante et les pelotes s'étirent progressivement, la faible résistance

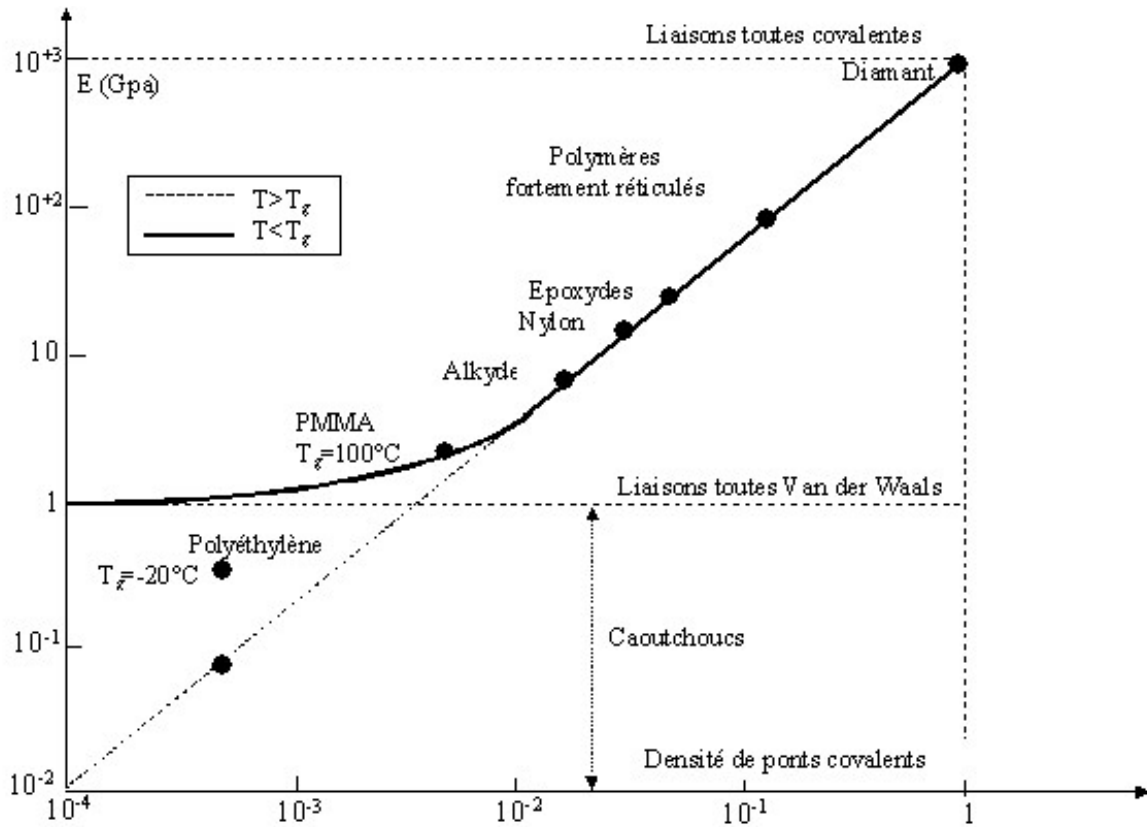
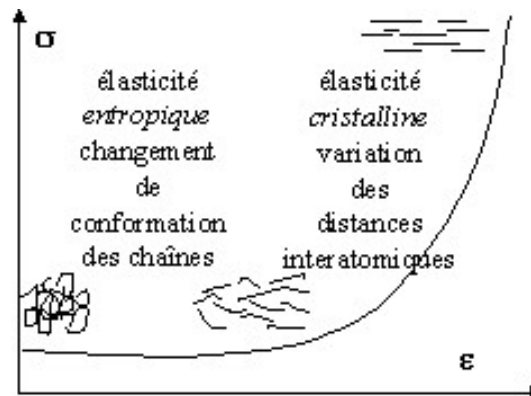
FIG. 1.6 – Influence de la T_g et du taux de réticulation

FIG. 1.7 – L'élasticité d'origine entropique

à cet étirement provenant de l'agitation thermique qui tend à réemmêler les chaînes. A très haute déformation, le module tangent croît brutalement car ce sont les liaisons covalentes du squelette carboné de la plupart des chaînes qui sont maintenant étirées et la rupture (*fragile*) intervient sans accroissement notable de déformation.

1.2.4 Entre raideur et rupture

Si un matériau suivait à l'échelle macroscopique les lois microscopiques jusqu'à rupture il stockerait une quantité d'énergie mécanique égale à la somme des énergies de toutes ses liaisons chimiques, c'est à dire du même ordre que celle contenue dans une masse équivalente d'explosif. A la rupture cette énergie serait brutalement libérée en une véritable explosion. Manger s'apparenterait à allumer dans sa bouche un bâton de dynamite.

Heureusement, il n'en est rien car les résistances R_M ultimes mesurées (cf. annexe A.5 et A.6) sont de plusieurs ordres de grandeur inférieures à la limite théorique $\sigma_M \simeq \frac{E}{10}$. Au delà d'un seuil

de contrainte, les matériaux cristallins dissipent l'excédent d'énergie mécanique en se déformant de manière irréversible supportant des allongements supérieurs à la valeur théorique $\varepsilon_M \simeq 10\%$ sans conséquence dangereuse (*cf.* annexe A.7). Mais il faut alors les comprimer fortement pour leur redonner leur forme initiale et au bout de quelques cycles, le processus de dégradation par fatigue provoque leur rupture. Le comportement particulier des élastomères provient du changement de conformation

Matériau	Déformation (%)	Contrainte (MPa)	Énergie stockable ($J.kg^{-1}$)
Bronze	0,3	400	70
Bois d'Ilf (arc)	0,9	120	900
Corne	4,0	90	1500
Cheveux humains	30	160	13000
Caoutchouc	300	7	8000
Acier à ressort	0,3	700	130
Tendon	8,0	70	2500

TAB. 1.9 – Capacités de stockage d'énergie

des macromolécules et non de l'extension des liaisons fortes du squelette et conduit à une réponse réversible jusqu'à rupture mais non linéaire de sorte que leurs grandes déformations s'obtiennent à faible niveau de contrainte limitant leur capacité de stockage.

1.3 La mécanique des solides continus

C'est le domaine de la Science qui étudie et modélise le comportement de la matière en prenant en compte, contrairement à la Mécanique Rationnelle, sa déformabilité. Comme les déformations dépendent non seulement des forces, mais aussi de la température, il faut également prendre en compte les lois d'échange de chaleur et les principes de la Thermodynamique. Contrairement à ces principes bien établis, les lois de déformation sont loin d'être simples et connues avec autant de certitude. Si théorie et calculs sont nécessaires pour modéliser et prédire, la théorie doit être précédée d'observations et les calculs vérifiés par l'expérience.

Avec l'avènement des matériaux composites modernes, la Science des Matériaux ne peut plus faire l'impasse sur la texture de la matière pour préciser les lois de comportement. En passant directement de l'échelle microscopique, l'ångström des liaisons atomiques, aux dimensions macroscopiques on oublie que les matériaux comportent des textures aux échelles mésoscopiques intermédiaires (*cf.* annexe A.3), *textures qui vont influencer considérablement sur certaines de leurs propriétés, tout particulièrement sur leurs caractéristiques de résistance mécanique.*

Cependant, il faut garder présent à l'esprit le fait que tous les développements théoriques sont basés sur la *conception fondamentale d'un milieu continu dont les transformations sont continues*. Or nous savons que la matière est discontinue à l'échelle moléculaire, souvent même à une échelle beaucoup plus grande : cristaux d'un métal, grains d'une roche, granulats d'un béton. Mais la Mécanique se place à une échelle macroscopique, c'est à dire à une échelle suffisamment grande pour que la matière apparaisse comme continue, sauf éventuellement le long de certaines surfaces de discontinuité comme les fractures.

1.3.1 Les essais en mécanique

Dimensionner des structures pour qu'elles puissent supporter le chargement nécessite la résolution complète du problème mécanique associé. Aux équations de conservation (masse, impulsion, énergie) il faut adjoindre les *lois de comportement* des matériaux constitutifs, équations d'état reliant contrainte et déformation.

L'établissement de la loi de comportement d'un matériau est généralement phénoménologique, basée sur l'expérimentation macroscopique et l'identification des paramètres dans le cadre de la formulation thermodynamique. Cependant l'identification expérimentale du comportement mécanique

d'un matériau est par nature une opération délicate car elle ne peut s'effectuer qu'à partir d'essais mécanique sur des éprouvettes qui, par leur taille, doivent être considérées comme des structures. Or, on ne peut déduire le champ de contraintes à partir des efforts globaux dans une structure, condition nécessaire à l'identification du comportement, que si l'on connaît déjà le comportement. Pour vaincre cette difficulté, force nous est de recourir à des géométries et des sollicitations spécifiques permettant de déduire les variables mécaniques locales à partir des grandeurs globales quel que soit le comportement. Les essais mécaniques classiques s'effectuent donc sur des éprouvettes normalisées et des sollicitations particulières telles que la traction uniaxiale d'un barreau long, la torsion ou la mise en pression interne d'un tube mince,...

1.3.2 L'essai de traction simple

L'essai de traction met habituellement en évidence trois stades principaux dans l'évolution du comportement du matériau (*cf.* Fig. 1.8)

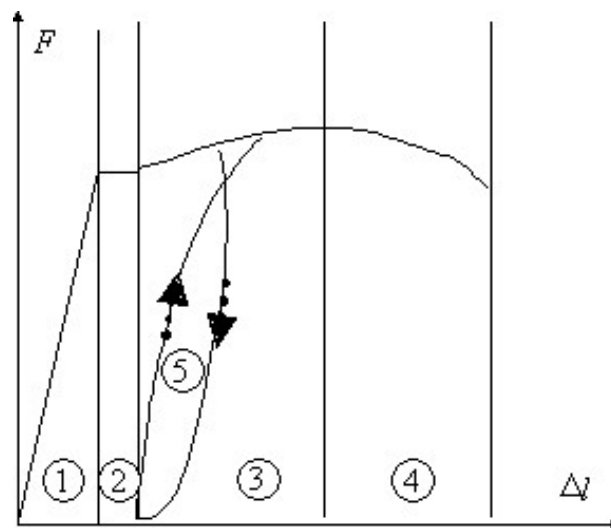


FIG. 1.8 – Essai de traction : réponse typique

Un comportement élastique linéaire ou non (domaine 1) pour lequel aucune déformation résiduelle ne se maintient après décharge.

Un stade de déformation plastique parfait (domaine 2) et avec écrouissage (domaine 3) caractérisé par une déformation résiduelle irréversible après décharge, l'ensemble du comportement étant complètement indépendant du temps, notamment de la vitesse de chargement.

Une étape d'endommagement (domaine 4) conduisant à la rupture. L'endommagement se manifeste par l'altération progressive des propriétés mécaniques qui accompagne, habituellement pour d'assez grandes déformations ou sous sollicitations cycliques, la formation et la croissance de microfissures et microcavités, altération pouvant aller jusqu'à la rupture. Naturellement liées à la déformation elle même les lois d'endommagement doivent être couplées aux lois de comportement et l'ensemble détermine le comportement réel du matériau. Selon les matériaux, la rupture peut se produire plus ou moins tôt, notamment en stade élastique ou plastique avant endommagement.

Cependant, dans bien des cas le temps intervient et la courbe d'essai obtenue est une fonction de la vitesse de sollicitation (domaine 5). Ainsi un arrêt à contrainte constante s'accompagne d'une déformation de *fluage*, un arrêt à déformation constante s'accompagne d'une *relaxation* de la contrainte, une sollicitation cyclique d'*hystérésis*. C'est la manifestation de la viscosité du matériau visco-élasticité ou visco-élasto-plasticité.

1.3.3 Les modes de ruine

Les modes de ruine d'une structure dépendent des sollicitations mécaniques, thermiques, chimiques qu'elle subit, des défauts qu'elle contient et des propriétés du matériau. Ils comprennent :

Le flambage instabilité résultant d'une diminution d'énergie sous faible perturbation des conditions aux limites. Au delà d'un seuil de compression, une structure allongée fléchit brutalement, cette configuration devenant énergétiquement plus favorable.

Les agressions chimiques oxydation et corrosion sous contrainte.

Les ruptures par endommagement création de nouvelles surfaces au sein du matériau. A l'échelle des atomes les mécanismes d'endommagement se classent en trois types génériques :

- Les *clivages*, rupture de liaisons en *traction* avec création d'une fissure, concernent les matériaux cristallisés. Un mécanisme analogue intervient dans les craquelures des polymères, dans le béton plus ou moins cristallisé, dans les verres, dans les ruptures intergranulaires.
- Les *glissements*, décalage sous *cisaillement* des liaisons entre les atomes de deux plans atomiques adjacents sont à l'origine de la déformation plastique ; Ils peuvent conduire à une instabilité de la structure, striction ou déchirure ductile (plastic collapse) lorsque la diminution de section qu'ils induisent ne peut plus être compensée par l'écroutissage (durcissement) du matériau. La déformation plastique provoque aussi l'apparition de petites cavités internes ; Leur croissance et leur coalescence conduisent à la rupture. Sous sollicitation cycliques, les glissements n'étant pas parfaitement réversibles, il finissent par détériorer la surface des pièces aboutissant aux ruptures de fatigue.
- Les *cavitations* par diffusion de lacunes : mécanisme très important en fluage nécessitant des températures élevées de fonctionnement ou de fortes irradiations.

Ces mécanismes de ruine interagissent avec les mécanismes chimiques (migration de gaz dans les cavités, blocage des glissements par des atomes de soluté ou des précipités, modification de l'énergie des joints de grains ou des surfaces par migration d'impuretés, réactions chimiques sur les surfaces nouvellement créées et conduisent à l'apparition de fissures à l'échelle macroscopique.

1.3.4 Hétérogénéité et anisotropie

Entre l'échelle de la macro mécanique ou mécanique des milieux continus (la matière est considérée comme une boîte noire) et l'échelle atomique de la micro mécanique (ou l'on étudie les phénomènes élémentaires : défauts d'empilement, mouvement des dislocations, interactions avec les défauts ponctuels lacunes, interstitiels, ...), existent dans les matériaux réels des échelles intermédiaires d'inhomogénéité structurale (grains de polycristaux ; phases de métaux ou d'alliages de polymères ; charges, particules ou fibres de renforcement des composites métalliques, céramiques ou à matrice polymère ; granulats des bétons ; pores ; ...) qui constituent la texture des matériaux (*cf.* annexe A.3). Cette texture va influencer considérablement sur certaines de leurs propriétés, tout particulièrement sur leurs caractéristiques de résistance mécanique. Elle est à l'origine des différences considérables constatées entre les valeurs théoriques déduites des propriétés des liaisons et les valeurs mesurées. Il aura fallu attendre la découverte (à partir des années 1930) des défauts (Griffith) et des dislocations (Taylor) et la prise en compte de leurs effets pour expliciter ces différences. Les matériaux réels ne sont pas homogènes. Comportement mécanique et endommagement dépendent non seulement de la composition chimique globale, mais aussi de l'arrangement des diverses phases. C'est bien sûr le cas des matériaux composites artificiels dans lesquels on introduit volontairement à l'élaboration diverses phases (matrice et éléments de renforcement, fibres, charges, ...), mais les matériaux naturels utilisés depuis longtemps sont pour la plupart des composites naturels comme le bois. Les moyens actuels d'observation et d'analyse chimique locale ont largement contribué au développement d'une nouvelle approche plus déductive de la mécanique des solides, la méso mécanique qui tente de réaliser un passage du microscopique au macroscopique en définissant le comportement macroscopique à partir de la description de la texture, des mécanismes élémentaires de déformation et d'endommagement et de leur intégration dans le processus de changement d'échelle conduisant à la définition de la loi de comportement macroscopique. Cette dernière approche est plus complexe, moins établie, mais plus riche et mieux fondée physiquement.

- **Anisotropie**

De part la constitution anisotrope du matériau, étroitement reliée à l'hétérogénéité de sa microstructure, son comportement mécanique est anisotrope (dépendance de la réponse vis-à-vis de la direction de sollicitation) et cette anisotropie évoluera avec la déformation qui modifie l'organisation de la microstructure. Cependant, lorsque la microstructure présente certains éléments de symétrie il en est de même de l'anisotropie et la *loi de comportement correspondante doit respecter ces éléments de symétrie*. L'origine physique de l'anisotropie est l'hétérogénéité de la microstructure. Si l'on décompose celle-ci en éléments homogènes, l'anisotropie macroscopique résulte d'une anisotropie élémentaire, celle des éléments homogènes de la microstructure, et d'une anisotropie d'organisation, attachée à l'agencement spatial de ces éléments homogènes.

L'anisotropie élémentaire est déterminée par l'anisotropie des mécanismes de déformation, elle même liée à l'anisotropie de la structure interne de l'élément (liaisons atomiques, directions de glissement cristallographique, défaut d'empilement, directions de diffusion, ...).

L'anisotropie d'organisation résulte de l'hétérogénéité de la microstructure : forme, orientation et répartition spatiale de grains, inclusions, cavités, textures, ...

Si cette complexité des textures et de leur évolution rend difficile le passage micro-macro, elle offre en contrepartie des possibilités quasi infinies de modulation des propriétés mécaniques des matériaux.

1.3.5 Le Comportement mécanique des matériaux

Un corps ne pouvant résister à la sollicitation appliquée qu'en se déformant, l'analyse de la rigidité des structures en terme de force et d'allongement ne permet pas de distinguer la contribution de la géométrie de celle, *intrinsèque*, du matériau. Pour ce faire, il faut définir en tout point de la structure un état mécanique local indépendant de sa géométrie. La caractérisation de cet état local en terme de contrainte σ et de déformation ε - la relation entre ces grandeurs et leurs dérivées temporelles définissant la loi de comportement *macroscopique* - fait l'objet du second chapitre.

La plupart des structures étant conçues pour supporter un chargement à température ambiante en n'accusant que de faibles déformations, le troisième chapitre de ce volume est consacré à la loi de *comportement élastique* des matériaux.

Au delà d'un chargement critique les matériaux ductiles (particulièrement les métaux) présentent un comportement *fluide* et *s'écoulent* sous contrainte.

Cet écoulement s'arrête lorsque le chargement est réduit en dessous du seuil critique mais le matériau s'est déformé de manière permanente. Ce comportement *plastique* est exploité dans les procédés de mise en forme (laminage, emboutissage,...) imposant au matériau une déformation importante mais permanente.

Le quatrième chapitre est dédié aux lois de comportement *plastique*. Les mécanismes génériques à petite échelles (micro ou mésoscopique) à l'origine de ce comportement sont mis en relation avec les propriétés mécaniques macroscopiques mesurables.

Tout matériau fortement sollicité s'endommage progressivement jusqu'à présenter des défauts macroscopiques. La mécanique de la rupture a pour objet l'étude de ces défauts et l'établissement des données expérimentales permettant de déterminer leur cinétique de propagation et la taille critique au-delà de laquelle, pour une sollicitation donnée, la rupture brutale se produit. Cette rupture peut être provoquée par une surcharge occasionnelle ou, plus insidieusement, par un mécanisme de fatigue au cours duquel les fissures se forment et croisent lentement sous chargement plus faible lorsque ce dernier est appliqué de manière cyclique.

Le cinquième chapitre est dédié aux lois de comportement à *rupture* et aux mécanismes d'endommagement associés.

Chapitre 2

ÉTAT MÉCANIQUE

2.1 Milieux déformables

2.1.1 Forces externes et équilibre mécanique

La loi fondamentale de la dynamique $m\vec{\gamma} = \sum \vec{F}$ appliquée à un corps en équilibre mécanique statique implique la nullité de la résultante et du moment résultant des efforts externes appliqués.

$$\sum \vec{F} = 0 \quad \sum \vec{M} = 0 \quad (2.1)$$

- Si le nombre d'efforts externes est égal au nombre d'équations, le corps est en état d'équilibre *isostatique* et les efforts sont entièrement déterminés.
- Si ce nombre est supérieur au nombre d'équations, le corps est en état d'équilibre *hyperstatique* et la détermination des efforts implique la prise en compte de la déformation du milieu pour obtenir les équations complémentaires.

2.1.2 Forces internes, forces de surface et transmission des efforts

Sous l'action d'efforts externes tout corps se déforme. Cette déformation fait apparaître des forces *internes* dont l'origine se situe à l'échelle atomique. Ce sont les liaisons atomiques distendues (ou comprimées) qui exercent des forces de rappel qui tendent à ramener les atomes à leur position d'équilibre et le corps dans son état initial. Ces forces se caractérisent par un rayon d'action de l'ordre de quelques distances interatomiques. Or la *Mécanique des Milieux Continus*, théorie macroscopique, ne considère que des distances grandes par rapport aux dimensions atomiques et leur rayon d'action doit être considéré comme nul à cette échelle. Les forces de rappel à l'origine de l'existence des forces internes sont des forces à *courte portée* qui ne se transmettent qu'à leur environnement immédiat.

Il en résulte que les forces exercées sur une partie du corps par les parties environnantes agissent directement par sa surface. Les forces internes sont des *forces surfaciques*, des actions de *contact*.

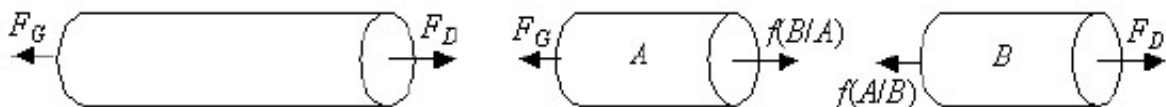


FIG. 2.1 – Principe de l'action et de la réaction : l'action de la partie A sur la partie B est égale et opposée à l'action de la partie B sur la partie A

Considérons un corps soumis à l'action des forces externes \vec{F}_G et \vec{F}_D . L'équilibre mécanique statique impose $\vec{F}_G + \vec{F}_D = 0$. Séparons par la pensée ce corps en deux parties A et B. L'équilibre de la partie A prise isolément impose l'existence d'une force $\vec{f}(B/A)$ telle que $\vec{F}_G + \vec{f}(B/A) = 0$, force interne représentant l'action de la partie B sur la partie A. Réciproquement, l'équilibre de la partie B prise isolément impose l'existence d'une force $\vec{f}(A/B)$ telle que $\vec{F}_D + \vec{f}(A/B) = 0$, force interne représentant l'action de la partie A sur la partie B.

Il résulte de l'équilibre du corps pris dans son ensemble que la résultante des forces internes est toujours nulle :

$$\vec{f}(B/A) + \vec{f}(A/B) = 0 \quad (2.2)$$

2.1.3 Raideur, rigidité, état mécanique local

Un corps ne pouvant résister à la sollicitation appliquée qu'en se déformant, l'essai de traction donne accès à la raideur K de l'éprouvette définie comme le rapport de la force F de traction à l'allongement Δl résultant. La raideur K prend en compte à la fois la géométrie de l'éprouvette et la *rigidité intrinsèque* du matériau.

L'expérience a montré que pour étirer de la même quantité Δl deux éprouvettes du même matériau

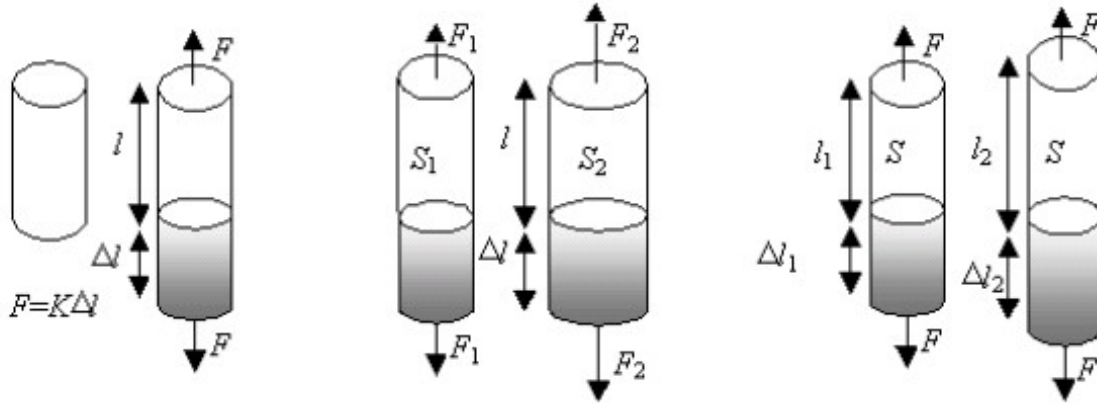


FIG. 2.2 – Raideur de l'éprouvette et rigidité du matériau

de même longueur initiale l mais d'aire de section droite S différentes, la force F à appliquer varie proportionnellement à S .

Elle a également montré qu'à aire de section S et à force F fixées, l'allongement résultant Δl varie proportionnellement à la longueur initiale l .

Il en résulte que la raideur K varie proportionnellement à S et inversement proportionnellement à l de sorte que la relation $F = K\Delta l$ se met sous la forme

$$\frac{F}{S} = E \frac{\Delta l}{l} \quad (2.3)$$

la quantité E indépendante de la géométrie de l'éprouvette étant une caractéristique *intrinsèque* du matériau : sa rigidité.

Les variables décrivant l'état mécanique local, indépendamment de la géométrie de la structure, seront donc :

- la contrainte $\sigma = \frac{F}{S}$: densité surfacique de force
- la déformation $\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}$: variation relative de longueur

2.2 Les contraintes

Elles caractérisent l'état de sollicitation mécanique (efforts internes) en tout point du matériau, indépendamment de sa nature et de ses caractéristiques de résistance.

2.2.1 État mécanique local

Pour caractériser l'état de sollicitation mécanique (efforts internes) en tout point du matériau indépendamment de la géométrie du corps, la description en terme de force est insuffisante, il faut introduire la notion de densité surfacique de force.

Le vecteur contrainte

Si la force de contact résultante \vec{f} représentant l'action exercée par la partie A sur la section de coupe de la partie B doit bien équilibrer la force externe \vec{F} soit $\vec{f} + \vec{F} = 0$, elle n'a pas de raison, sauf cas particulier, d'être uniformément répartie (en module et/ou en direction) sur cette section. Chaque élément d'aire dS supportera une force élémentaire $d\vec{f} = \vec{T}ds$ telle que $\int_S \vec{T}dS = \vec{f}$. La densité surfacique de force \vec{T} , appelée *vecteur contrainte*, est une fonction du point courant M de la section de coupe. Plutôt que d'employer le terme *section de coupe*, nous utiliserons désormais le terme de *facette* plus adapté au fait que les coupes sont virtuelles.

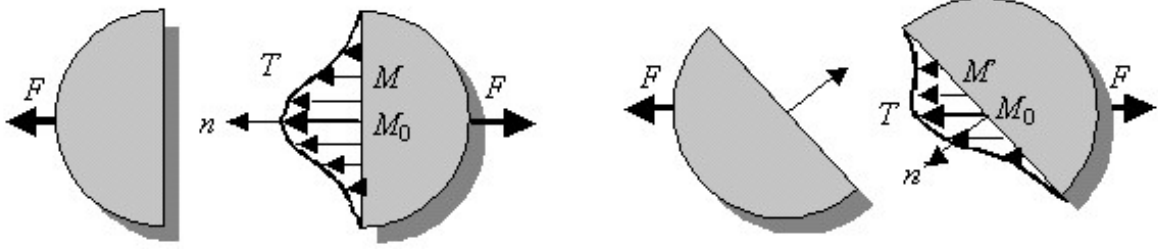


FIG. 2.3 – Le vecteur contrainte T dépend du point M et de l'orientation n de la facette

En un point M_0 donné considérons deux sections de coupe S et S' caractérisée respectivement par leurs orientations \vec{n} et \vec{n}' . Pour chacune d'elles le vecteur contrainte \vec{T} vérifie :

$$\text{sur } S \quad \int_S \vec{T}dS = \vec{f} \quad \text{sur } S' \quad \int_{S'} \vec{T}dS' = \vec{f} \quad (2.4)$$

En M_0 : $\vec{T}(M_0, \vec{n}) \neq \vec{T}(M_0, \vec{n}')$.

Le vecteur contrainte \vec{T} est également une fonction de l'orientation \vec{n} de la facette.

Le volume représentatif élémentaire

Le vecteur contraintes \vec{T} représentant au point M la densité surfacique de force sur la facette d'orientation \vec{n} peut également s'exprimer sous la forme :

$$\vec{T}(M, \vec{n}) = \frac{\vec{f}}{S} = \lim_{S \rightarrow 0} \frac{\vec{f}}{S} \quad (2.5)$$

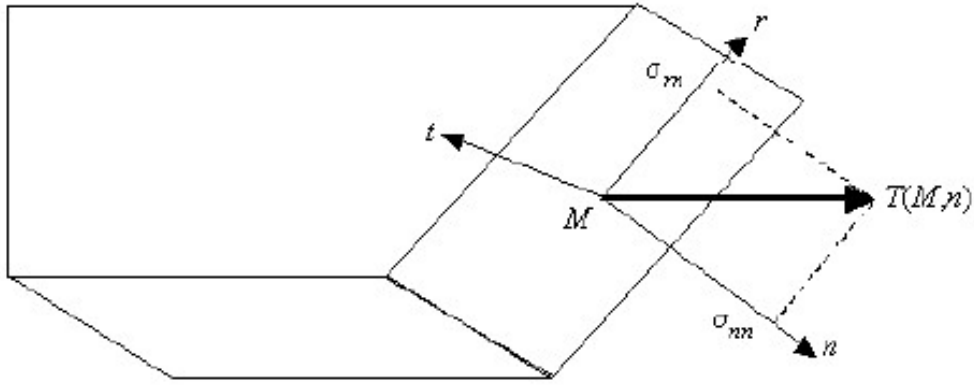
Lorsque l'on fait tendre l'aire S vers zéro en partant de l'échelle de la dimension du corps, le rapport $\frac{f}{S}$ qui évolue d'abord de manière continue présente de fortes fluctuations lorsque l'on s'approche de l'échelle des dimensions atomiques pour laquelle la notion de milieu continu perd son sens.

Dans les matériaux réels ces fluctuations apparaissent plus tôt à l'échelle caractéristique des hétérogénéités de sa texture, typiquement de l'échelle du grain ($100 \mu m$) dans les matériaux cristallins à celle des granulats ($1 cm$) dans les bétons. Cette échelle définit la dimension du volume représentatif élémentaire de la théorie des milieux continus, la taille de la "particule", offrant l'avantage d'éviter toute hypothèse sur la constitution de la matière.

Repère local, contraintes normales et de cisaillement

Au point M , pour une facette de direction \vec{n} , on définit le repère local - trièdre direct - $M, \vec{n}, \vec{r}, \vec{t}$ de telle manière que les vecteurs $\vec{T}, \vec{n}, \vec{r}$ soient coplanaires.

Dans ce repère les composantes du vecteur contrainte $\vec{T}(M, \vec{n})$ sont $\sigma_{nn}, \sigma_{rn}, \sigma_{tn}$, le premier indice faisant référence à l'axe de projection, le second à l'orientation \vec{n} du plan de la facette. Par construction on a toujours $\sigma_{tn} = 0$ et les composantes non nulles de \vec{T} sont sa composante normale σ_{nn} selon \vec{n} appelée contrainte *normale* notée σ et sa composante tangentielle σ_{rn} située dans le plan de la facette perpendiculaire à \vec{n} appelée contrainte de *cisaillement* notée τ .

FIG. 2.4 – Le repère local de la facette : M, n, r, t

contrainte normale σ C'est la composante de \vec{T} qui *tire* lorsqu'elle est parallèle à \vec{n} ou qui *pousse* si elle est antiparallèle à \vec{n} . Le signe de σ est donc *intrinsèque* : $\sigma > 0$ pour la *traction* et $\sigma < 0$ pour la *compression*.

contrainte de cisaillement τ C'est la composante de \vec{T} qui agit à la manière d'une "cisaille", d'où son nom.

La dimension des composantes de contrainte est $[ML^{-1}T^{-2}]$: rapport de la force $[MLT^{-2}]$ à l'aire $[L^2]$ de la section sur laquelle elle s'exerce. Son unité est le Pascal Pa (ou $N.m^{-2}$). En pratique cette unité est trop petite et l'unité courante du mécanicien est le Mégapascal MPa (ou $MN.m^{-2}$), voire le Gigapascal GPa (ou $GN.m^{-2}$).

L'état mécanique local au point M sera donc déterminé si l'on connaît en ce point les composantes σ et τ de tous les vecteurs contraintes $\vec{T}(M, \vec{n})$ associés à toutes les facettes d'orientation \vec{n} possibles passant par ce point.

En chaque point M , parmi toutes les directions de facettes possibles, certaines supporteront un *cisaillement maximal* tandis que d'autres supporteront une *traction maximale*. Il est important de faire une distinction entre les deux types de composantes normale et tangentielle car l'expérience montre que tout matériau présente, selon sa nature, un seuil caractéristique de contrainte σ_C ou τ_C selon son mode de ruine, seuil au delà duquel il cède.

- Les matériaux dits *ductiles* - tels les métaux - cèdent par déformation *plastique* lorsque le *cisaillement maximal* τ_M atteint le seuil τ_C .
- Les matériaux dits *fragiles* - tels le verre - cèdent lorsque la *traction maximale* σ_M atteint le seuil σ_C .

2.2.2 Le tenseur des contraintes

En un point M donné, il existe nécessairement des relations entre les divers vecteurs contrainte T associés aux diverses facettes de normales n passant par ce point. Pour s'en convaincre, il suffit de considérer l'équilibre d'une "particule" de centre M . Pour une telle particule, de surface externe S , les vecteurs contrainte doivent vérifier :

$$\int_S \vec{T} dS = 0 \quad \int_S \vec{r} \wedge \vec{T} dS = 0 \quad (2.6)$$

traduisant respectivement la nullité de la résultante des efforts exercés par son environnement et de son moment. D'un point de vue mathématique, cela implique l'existence d'un opérateur liant en chaque point M le vecteur contrainte \vec{T} à l'orientation \vec{n} de la facette sur laquelle il s'applique.

Isolons au sein de la matière un tétraèdre élémentaire $MABC$ dont les trois faces MBC , MAC et MAB sont les trois faces du trièdre M, x_1, x_2, x_3 .

La quatrième ABC caractérisée par sa normale \vec{n} de composantes (cosinus directeurs) :

$$n_1 = \frac{S_{MBC}}{S_{ABC}} \quad n_2 = \frac{S_{MAC}}{S_{ABC}} \quad n_3 = \frac{S_{MAB}}{S_{ABC}} \quad (2.7)$$

supporte un vecteur contrainte $\vec{T}(M, \vec{n})$ de composantes (T_1, T_2, T_3) représentant l'action du reste du corps sur ABC .

De la même manière $\vec{T}_1(M, -\vec{x}_1)$, $\vec{T}_2(M, -\vec{x}_2)$ et $\vec{T}_3(M, -\vec{x}_3)$ représenteront respectivement l'action du reste du corps sur MBC , MAC et MAB .

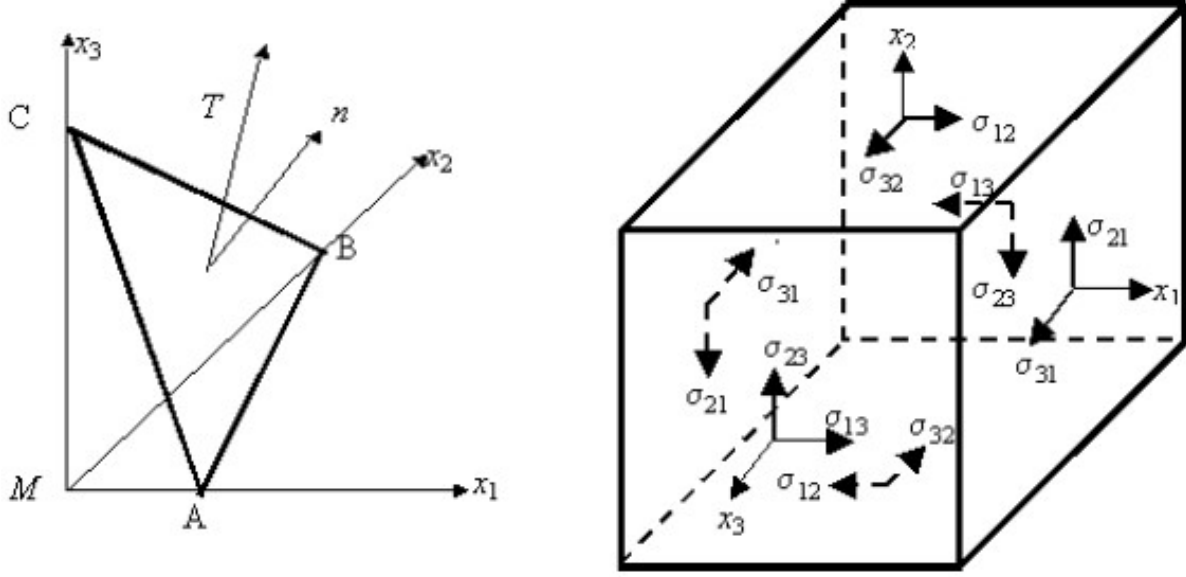


FIG. 2.5 – Équilibre : Tétraèdre, Parallélépipède

Équilibre des forces L'équilibre du tétraèdre qui doit s'écrire en terme de force et non en terme de contrainte (densité surfacique de force) implique la relation :

$$\vec{T}(M, \vec{n})S_{ABC} + \vec{T}_1(M, -\vec{x}_1)S_{MBC} + \vec{T}_2(M, -\vec{x}_2)S_{MAC} + \vec{T}_3(M, -\vec{x}_3)S_{MAB} = 0 \quad (2.8)$$

Comme, en vertu du principe de l'action et de la réaction, $\vec{T}(M, -\vec{x}) = -\vec{T}(M, \vec{x})$, cette relation s'écrit en tenant compte des relations (2.7) :

$$\vec{T}(M, \vec{n}) = \vec{T}_1(M, \vec{x}_1)n_1 + \vec{T}_2(M, \vec{x}_2)n_2 + \vec{T}_3(M, \vec{x}_3)n_3 \quad (2.9)$$

En introduisant les composantes $\sigma_{1i}, \sigma_{2i}, \sigma_{3i}$ des vecteurs contraintes $\vec{T}_i(M, \vec{x}_i)$ $i \in \{1, 2, 3\}$ représentant les actions des faces MBC , MAC et MAB sur le reste du corps :

$$\begin{aligned} \vec{T}_1(M, \vec{x}_1) &= \sigma_{11}\vec{x}_1 + \sigma_{21}\vec{x}_2 + \sigma_{31}\vec{x}_3 \\ \vec{T}_2(M, \vec{x}_2) &= \sigma_{12}\vec{x}_1 + \sigma_{22}\vec{x}_2 + \sigma_{32}\vec{x}_3 \\ \vec{T}_3(M, \vec{x}_3) &= \sigma_{13}\vec{x}_1 + \sigma_{23}\vec{x}_2 + \sigma_{33}\vec{x}_3 \end{aligned} \quad (2.10)$$

Finalement la relation (2.10) entre $\vec{T}(M, \vec{n})$ et \vec{n} s'écrit de manière générale :

$$\vec{T}(M, \vec{n}) = \bar{\sigma} \vec{n} \quad (2.11)$$

à l'aide du tenseur $\bar{\sigma}(M)$ dont les composantes dans le repère M, x_1, x_2, x_3 sont :

$$\bar{\sigma}(M) = \begin{vmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{vmatrix} \quad (2.12)$$

La connaissance des vecteurs contraintes agissant sur trois facettes orthogonales de normales x_1, x_2, x_3 suffit à déterminer au point M l'état de contrainte caractérisé par le tenseur des contraintes $\bar{\sigma}$, donc le vecteur contrainte $\vec{T}(M, \vec{n})$ sur toute facette contenant M .

Équilibre des moments De même que pour la résultante des forces, l'équilibre impose que le moment résultant soit nul. En raisonnant cette fois sur une particule parallélépipédiques élémentaire de volume $dx_1 dx_2 dx_3$ et en calculant la composante selon l'axe x_3 du moment résultant :

$$\sigma_{21} \underbrace{dx_2 dx_3}_{\text{aire}} dx_1 = \sigma_{12} \underbrace{dx_1 dx_3}_{\text{aire}} dx_2 \quad \sigma_{21} = \sigma_{12} \quad (2.13)$$

De manière analogue on obtient avec les deux autres composantes du moment : $\sigma_{23} = \sigma_{32}$ et $\sigma_{31} = \sigma_{13}$. La symétrie du tenseur des contraintes :

$$\bar{\sigma} = {}^t \bar{\sigma} \quad \sigma_{ij} = \sigma_{ji} \quad (2.14)$$

est une conséquence directe de la nullité du moment résultant

Les composantes de $\bar{\sigma}$ forment deux groupes distincts :

- Les composantes de la diagonale principale σ_{ij} avec $i = j$ composantes normales (*traction* > 0 ou *compression* < 0) dirigées selon les normales aux facettes.
- Les composantes hors diagonale σ_{ij} avec $i \neq j$ composantes tangentielles (*cisaillement*) contenues dans le plan des facettes.

2.2.3 Propriétés du tenseur des contraintes

Repère principal et invariants

Le tenseur $\bar{\sigma}(M)$ définissant l'état de contrainte en un point M est un opérateur *intrinsèque* qui lie la normale \vec{n} à une facette passant par ce point au vecteur contrainte qui s'applique à cette facette :

$$\vec{T}(M, \vec{n}) \quad (2.15)$$

Cette définition est *indépendante* du repère choisi, seule sa représentation, les valeurs de ses composantes, dépend du repère.

Comme pour tout tenseur symétrique de rang 2, il existe toujours un repère particulier, le *repère principal* dans lequel le tenseur des contraintes $\bar{\sigma}(M)$ a pour représentation une *matrice diagonale* dont les composantes sont appelées *contraintes principales* σ_1, σ_2 et σ_3 . Ce sont les valeurs propres *toujours réelles* de l'opérateur. Notons que le tenseur $\bar{\sigma}$ est toujours défini par **six quantités indépendantes**, ses six composantes dans un repère quelconque ou ses trois contraintes principales auxquelles il faut associer les trois angles d'Euler définissant la position du repère principal par rapport à celui du laboratoire.

Les contraintes principales σ_1, σ_2 et σ_3 - ainsi que le tenseur $\bar{\sigma}$ lui-même - vérifient l'équation caractéristique :

$$\mathbf{Det}(\bar{\sigma} - \lambda \bar{\delta}) = 0 \quad \lambda^3 - I_1 \lambda^2 + I_2 \lambda - I_3 = 0 \quad \bar{\sigma}^3 - I_1 \bar{\sigma}^2 + I_2 \bar{\sigma} - I_3 \bar{\delta} = \bar{0} \quad (2.16)$$

et sont indépendantes du repère choisi de sorte que les trois coefficients I_1, I_2 et I_3 sont des combinaisons de composantes de $\bar{\sigma}$ *invariantes* par changement de repère. Ces coefficients représentent le jeu d'invariants du tenseur : sa trace **Tr**, la somme des déterminants mineurs des composantes de sa diagonale principale et son déterminant **Det**.

$$\begin{aligned} I_1 &= \bar{\delta} \cdot \bar{\sigma} = \mathbf{Tr}(\bar{\sigma}) = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33} = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 \\ I_2 &= \frac{1}{2} \bar{\delta}^{(4)} \cdot \bar{\sigma} \cdot \bar{\sigma} = \sigma_{11}\sigma_{22} - \sigma_{12}^2 + \sigma_{22}\sigma_{33} - \sigma_{23}^2 + \sigma_{33}\sigma_{11} - \sigma_{31}^2 = \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1 \\ I_3 &= \frac{1}{6} \bar{\delta}^{(6)} \cdot \bar{\sigma} \cdot \bar{\sigma} \cdot \bar{\sigma} = \mathbf{Det}(\bar{\sigma}) = \frac{1}{6} \delta_{ijk} \delta_{pqr} \sigma_{ip} \sigma_{jq} \sigma_{kr} = \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \end{aligned}$$

Il existe une infinité de jeux d'invariants combinaisons du jeu précédent. La combinaison la plus usitée est le jeu d'invariants défini par :

$$\begin{aligned} I_1^* &= \mathbf{Tr}(\bar{\sigma}) & I_1^* &= I_1 & I_1 &= I_1^* = \mathbf{Tr}(\bar{\sigma}) \\ I_2^* &= \mathbf{Tr}(\bar{\sigma}^2) & I_2^* &= I_1^2 - 2I_2 & 2I_2 &= (I_1^{*2} - I_2^*) \\ I_3^* &= \mathbf{Tr}(\bar{\sigma}^3) & I_3^* &= I_1^3 - 3I_1^* I_2 + 3I_3 & 6I_3 &= 2I_3^* - 3I_1^* I_2^* + I_3^3 = 2\mathbf{Tr}(\bar{\sigma}^3) - 3\mathbf{Tr}(\bar{\sigma})\mathbf{Tr}(\bar{\sigma}^2) + \mathbf{Tr}^3(\bar{\sigma}) \end{aligned}$$

Sphérique et déviateur

Tout état de contrainte est décomposable en la somme de deux états :

Le sphérique état *isotrope* caractérisé par la contrainte normale moyenne (*traction* ou *compression*)

$\sigma_m = \text{Tr}(\bar{\sigma})$ auquel est associée la partie **sphérique** $\bar{S} = \sigma_m \bar{\delta}$ du tenseur $\bar{\sigma}$. Il est entièrement caractérisé par la contrainte normale moyenne σ_m et, du fait de son isotropie, il est diagonal dans tout repère : $\text{Tr}(\bar{S}) = \text{Tr}(\bar{\sigma}) = 3\sigma_m$. C'est la généralisation de la notion de pression.

Le tenseur des contraintes en hydrostatique a donc pour expression $\bar{\sigma} = \sigma_m \bar{\delta} = -p \bar{\delta}$, la pression p , contrainte normale de compression négative pour le mécanicien étant définie positive par l'hydrodynamicien.

Le déviateur état *anisotrope* traduisant les déviations par rapport à l'isotropie moyenne et ca-

ractérisé par la contrainte déviatorique moyenne (*cisaillement*) $\sigma_d = \sqrt{\frac{\text{Tr}(\bar{\sigma} - \bar{S})^2}{3}}$ auquel est associée la partie **déviateur** $\bar{D} = \sigma_d \bar{\pi}$ du tenseur $\bar{\sigma}$.

$$\bar{\sigma} = \bar{S} + \bar{D} = \sigma_m \bar{\delta} + \sigma_d \bar{\pi} \quad (2.17)$$

Sa trace $\text{Tr}(\bar{D}) = 0$ est nulle par définition. Il est caractérisé par les cinq autres paramètres indépendants de $\bar{\sigma}$, la contrainte déviatorique (*cisaillement*) moyenne σ_d et les quatre paramètres indépendants du tenseur des directions $\bar{\pi}$ qui caractérise les directions principales de $\bar{\sigma}$ d'où son nom. Ce dernier est toujours défini par **quatre** quantités indépendantes :

- Ses six composantes dans un repère quelconque liées par les deux relations $\text{Tr}(\bar{\pi}) = 0$ et $\text{Tr}(\bar{\pi}^2) = 3$.
- Ses trois valeurs propres π_1, π_2 et π_3 - liées par les relations précédentes de sorte que π_1, π_2 et π_3 sont des fonctions d'un seul paramètre μ - auxquelles il faut associer les trois angles d'Euler définissant la position du repère principal par rapport à celui du laboratoire.

En d'autres termes, $\bar{\pi}$ ne possède qu'un seul invariant indépendant.

Contraintes octaédriques

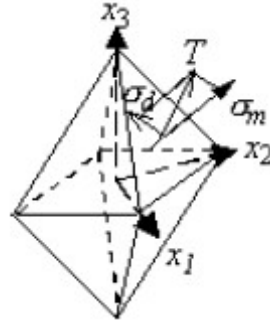


FIG. 2.6 – Contraintes octaédriques

Les huit facettes (cf. Fig : 2.6) de normales $\vec{n}(\pm \frac{1}{\sqrt{3}}, \pm \frac{1}{\sqrt{3}}, \pm \frac{1}{\sqrt{3}})$ constituant un octaèdre repéré dans le système d'axes principal de $\bar{\sigma}$ admettent la même composante normale $\sigma_{nn} = \sigma_m$ et la même composante de cisaillement $\sigma_{rn} = \sigma_d$. Le vecteur contrainte de chacune de ces facettes $\vec{T}(M, \vec{n})$ de composantes $(\pm \frac{1}{\sqrt{3}}\sigma_1, \pm \frac{1}{\sqrt{3}}\sigma_1, \pm \frac{1}{\sqrt{3}}\sigma_1)$ a pour module $|\vec{T}|^2 = \frac{1}{3}(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2)$. Ses composantes *locales* sont :

$$\begin{aligned} \sigma_{nn} &= \vec{T} \cdot \vec{n} = \frac{1}{3} \text{Tr}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) = \sigma_m \\ \sigma_{rn} &= \sqrt{|\vec{T}|^2 - \sigma_{nn}^2} = \sqrt{\frac{\text{Tr}(\bar{D})^2}{3}} = \frac{1}{3} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} = \sigma_d \end{aligned}$$

2.2.4 Représentation des contraintes

Espace des contraintes

Le tenseur $\bar{\sigma}$ au point M étant exprimé dans son repère principal, l'état mécanique au point M est alors décrit par la somme de trois sollicitations simples de *traction* (ou de *compression* pour les composantes de contraintes principales négatives) appliquées selon chacune des directions de contraintes principales. Dans l'espace des contraintes, repère orthonormé d'axes $O, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$, l'état mécanique au point M caractérisant le tenseur $\bar{\sigma}(M)$ est représenté par le vecteur $\overrightarrow{OM}(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$. C'est la somme de l'état mécanique correspondant au sphérique $\bar{S}(M) = \sigma_m \bar{1}$ caractérisé par le vecteur $\overrightarrow{OH}(\sigma_m, \sigma_m, \sigma_m)$ porté par la droite Δ de cosinus directeurs $(\pm \frac{1}{\sqrt{3}}, \pm \frac{1}{\sqrt{3}}, \pm \frac{1}{\sqrt{3}})$ et de l'état mécanique correspondant au déviateur $\bar{D}(M) = \sigma_d \bar{\pi}$ caractérisé par le vecteur $\overrightarrow{HM}(\sigma_1 - \sigma_m, \sigma_2 - \sigma_m, \sigma_3 - \sigma_m)$ contenu dans le plan perpendiculaire à Δ d'origine H . Cette représentation, applicable à tout tenseur symétrique de rang

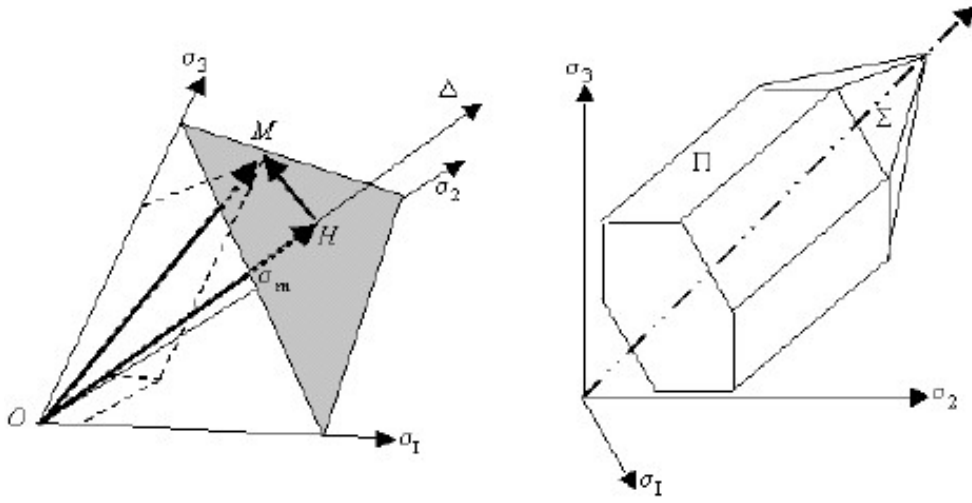


FIG. 2.7 – Espace des contraintes - Surfaces de charge Π et de rupture Σ

2, prendra tout son sens en mécanique pour représenter la loi de comportement plastique dans laquelle n'intervient que le déviateur des contraintes caractéristique du cisaillement. En particulier, les critères de plasticité des diverses classes de matériaux *ductiles* - qui cèdent en cisaillement - seront représentés dans cet espace par une surface de révolution d'axe Δ appelée *surface de charge* (Π). Tant que l'état de contrainte au point M sera tel que le vecteur \overrightarrow{OM} sera intérieur du cylindre bordé par cette surface, le matériau se comportera de manière élastique et ne présentera pas de déformation permanente. Dès que ce vecteur \overrightarrow{OM} viendra au contact de cette surface, l'écoulement plastique irréversible se produira en ce point et le matériau présentera après décharge des déformations permanentes.

De la même manière, les critères de rupture des matériaux *fragiles* - qui cèdent en traction - seront représentés par une seconde surface - de forme plus complexe, localement perpendiculaire à chacun des trois axes - appelée *surface de rupture* (Σ).

Cercles de Mohr

La représentation de Otto Mohr de l'état mécanique présente l'avantage d'un diagramme plan ne comportant que des cercles et des droites et s'appuie sur la représentation du vecteur contrainte $\vec{T}(M, \vec{n}) = \bar{\sigma}(M) \vec{n}$ associé à la facette de normale \vec{n} dans le repère *local* de la facette (*cf.* section 2.2.1) de sorte qu'il n'y admet que deux composantes σ_{nn} et σ_{rn} . Elle définit l'état mécanique au point M du corps dans l'espace local des contraintes caractérisé par le plan $O, \sigma_{nn}, \sigma_{rn}$ comme l'ensemble des points P extrémités du vecteur $\vec{T}(M, \vec{n})$ pour toutes les valeurs possibles de l'orientation \vec{n} . Ce lieu est défini par le système des trois équations :

$$\vec{n} \cdot \vec{n} = 1 \quad \sigma_{nn} = \vec{T} \cdot \vec{n} = (\bar{\sigma}(M) \cdot \vec{n}) \cdot \vec{n} \quad \sigma_{nn}^2 + \sigma_{rn}^2 = \vec{T} \cdot \vec{T} = (\bar{\sigma}(M) \cdot \vec{n}) \cdot (\bar{\sigma}(M) \cdot \vec{n})$$

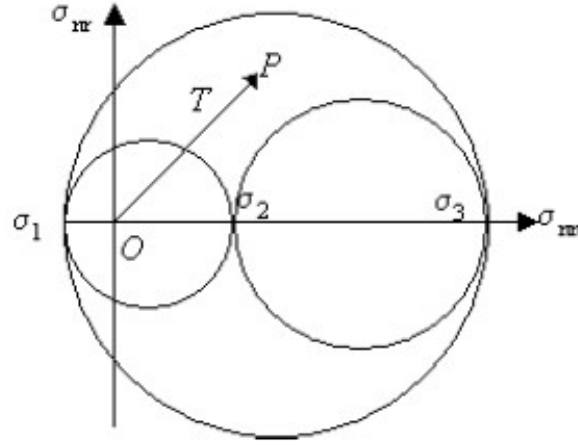


FIG. 2.8 – Espace de Mohr des contraintes locales

En supposant, sans perte de généralité, $\sigma_1 < \sigma_2 < \sigma_3$ les points représentatifs se situent dans le plan σ_{nn}, σ_{nr} à l'intérieur d'un domaine compris entre les trois cercles principaux centrés sur l'axe $O\sigma_{nn}$, de centre $\frac{\sigma_i + \sigma_j}{2}$ et de rayon $\frac{|\sigma_i - \sigma_j|}{2}$.

Les cercles principaux correspondent à l'annulation d'un des cosinus directeurs n_i de \vec{n} , c'est-à-dire que la direction considérée appartient à un plan principal. Cette situation est fort heureusement courante, qu'il s'agisse de problèmes plans où lorsqu'une direction principale est évidente, soit parce que la facette est libre de charge, soit par raison de symétrie.

Dans ce cas le vecteur $\vec{T}(M, \vec{n}) = \bar{\sigma}(M) \vec{n}$ appartient lui aussi au plan principal considéré. C'est cette propriété qui rend la construction de Mohr aussi efficace.

Dans ce qui suit, nous nous limiterons à l'étude des **cercles principaux** et nous considérerons, sans perte de généralité, que la direction \vec{n} appartient au plan principal σ_1, σ_2 c'est-à-dire que la composante n_3 de la normale à la facette est nulle. L'état de contrainte au point M étant représenté

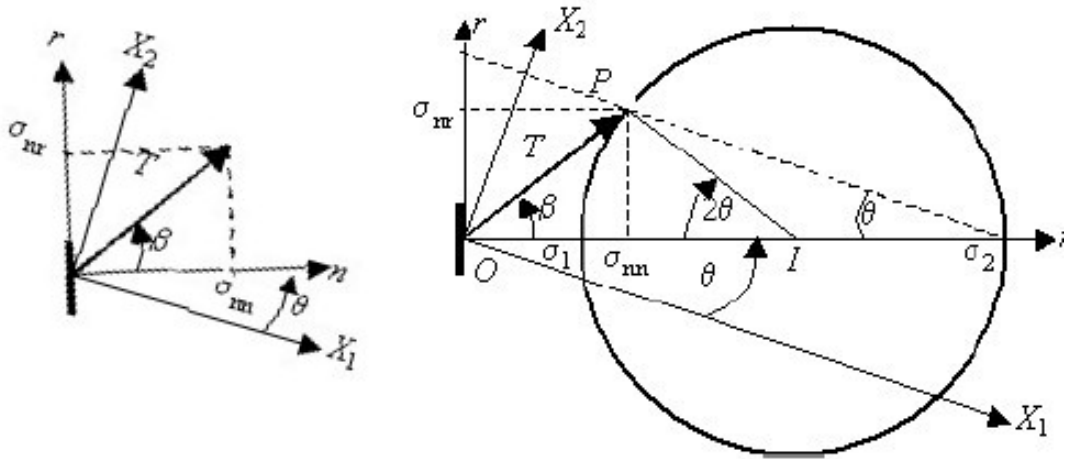


FIG. 2.9 – Espace matériel - Espace de Mohr des contraintes locales

par le tenseur $\bar{\sigma}$ diagonal dans son repère principal O, X_1, X_2, X_3 , la direction de la normale \vec{n} à la facette considérée sera donc caractérisée dans le plan principal O, X_1, X_2 par l'angle θ - repéré dans le sens trigonométrique - avec l'axe principal OX_1 et les vecteurs unitaires de son *repère local* \vec{n}, \vec{r} - (\vec{r} étant confondu avec X_3) - ont pour composantes : $\vec{n}(\cos \theta, \sin \theta, 0)$ et $\vec{r}(-\sin \theta, \cos \theta, 0)$. Les composantes *locales* de son vecteur contrainte \vec{T} sont :

$$\begin{aligned} \sigma_{nn} &= \vec{T} \cdot \vec{n} = \vec{n} \cdot \bar{\sigma} \vec{n} = \sigma_1 \cos^2 \theta + \sigma_2 \sin^2 \theta & \sigma_{nn} &= \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} - \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{2} \cos 2\theta \\ \sigma_{rn} &= \vec{T} \cdot \vec{r} = \vec{r} \cdot \bar{\sigma} \vec{n} = (\sigma_2 - \sigma_1) \sin \theta \cos \theta & \sigma_{rn} &= \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{2} \sin 2\theta \end{aligned}$$

définissant les équations paramétriques du cercle principal σ_1, σ_2 dans le plan de Mohr σ_{nn}, σ_{rn} :

$$(\sigma_{nn} - \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2})^2 + \sigma_{nn}^2 - (\frac{\sigma_2 - \sigma_1}{2})^2 = 0 \quad \text{Centre } OI = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} \quad \text{Rayon } R = \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{2}$$

Le point P du plan σ_{nn}, σ_{rn} extrémité du vecteur $\vec{T}(M, \vec{n})$ est assujéti à parcourir ce cercle lorsque la facette tourne dans le repère matériel OX_1X_2 .

Notons immédiatement que, par suite de la présence du signe "−" dans l'équation de σ_{nn} , le cercle est décrit dans le *sens des aiguilles d'une montre* lorsque l'angle θ de la facette tourne dans le *sens trigonométrique*.

Géométriquement :

$$\vec{T}(M, \vec{n}) = \vec{OP} = \vec{OI} + \vec{IP} \quad \sigma_{nn} = OI - R \cos 2\theta \quad \sigma_{rn} = R \sin 2\theta$$

Le cercle étant *toujours représenté dans le repère local* \vec{n}, \vec{r} , la figure représente exactement, en module et en direction, la configuration du vecteur $\vec{T}(M, \vec{n})$ dans le repère local. Mais, dans le cas particulier des cercles principaux, grâce à la propriété de coplanarité de $\vec{T}(M, \vec{n}), \vec{n}, \vec{r}, \vec{X}_1$ et \vec{X}_2 il est possible de représenter également sur la même figure la position du repère local par rapport aux axes principaux. Si l'angle $\widehat{X_1 M n}$ est égal à θ , l'angle au centre $\widehat{\sigma_1 I P}$ est égal à -2θ et l'angle $\widehat{\sigma_1 \sigma_2 P}$ est égal à θ . Les segments $\sigma_2 P$ et $\sigma_1 P$ sont respectivement parallèles aux directions principales X_1 et X_2 .

Lorsque θ varie de 0 à $\frac{\pi}{2}$ le point P représentatif de $\vec{T}(M, \vec{n})$ décrit le demi cercle depuis le point σ_1 pour $\theta = 0$ - première direction principale pour laquelle $\vec{T}(M, \vec{n})$ aligné sur $O\vec{n}$ à pour composantes locales $\sigma_{nn} = \sigma_1$ et $\sigma_{rn} = 0$ jusqu'au point σ_2 pour $\theta = \frac{\pi}{2}$ - seconde direction principale pour laquelle $\vec{T}(M, \vec{n})$ aligné sur $O\vec{r}$ à pour composantes locales $\sigma_{nn} = \sigma_2$ et $\sigma_{rn} = 0$.

La composante de cisaillement σ_{rn} passe par un maximum $^M \sigma_{nr} = R = \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{2}$ lorsque $\theta = \frac{\pi}{4}$ c'est-à-dire pour une direction *bissectrice* du repère principal.

Lorsqu'une direction principale est connue, ce qui est fréquent, il est plus rare de connaître également les deux autres. Dans le repère de mesure O, x_1, x_2, X_3 (OX_3 étant la direction principale connue)- le tenseur $\bar{\sigma}(M)$ décrivant l'état de contrainte au point M aura donc pour composantes :

$$\bar{\sigma}(M) = \begin{vmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & 0 \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{vmatrix}$$

Comme on ne s'intéresse qu'au plan principal perpendiculaire à OX_3 , on pourra se limiter au sous tenseur plan dont les composantes dans les repères O, x_1, x_2 et O, X_1, X_2 principal seront respectivement :

$$\bar{\sigma} = \begin{vmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} \end{vmatrix} \quad \bar{\sigma} = \begin{vmatrix} \sigma_1 & 0 \\ 0 & \sigma_2 \end{vmatrix}$$

Connaissant $\bar{\sigma}$ dans le repère O, x_1, x_2 , il est aisé de trouver les contraintes principales σ_1 et σ_2 et la position du repère principal O, X_1, X_2 par la simple construction du cercle de Mohr (Fig. 2.10) :

- Le vecteur contrainte \vec{T}_1 de la facette de normale \vec{x}_1 a pour composantes $(\sigma_{11}, \sigma_{21})$ dans le repère \vec{x}_1, \vec{x}_2 . Son repère local \vec{n}, \vec{r} étant confondu avec le repère \vec{x}_1, \vec{x}_2 , ses composantes locales seront $\sigma_{nn} = \sigma_{11}$ et $\sigma_{rn} = \sigma_{21}$. Dans le plan de Mohr $O, \sigma_{nn}, \sigma_{rn}$ l'extrémité de son vecteur \vec{T}_1 se situera au point P_1 .
- Le vecteur contrainte \vec{T}_2 de la facette de normale \vec{x}_2 a pour composantes $(\sigma_{12}, \sigma_{22})$ dans le repère \vec{x}_1, \vec{x}_2 . Son repère local \vec{n}, \vec{r} se déduisant du repère \vec{x}_1, \vec{x}_2 par rotation de $\frac{\pi}{2}$, $\vec{n} = \vec{x}_2$ et $\vec{r} = -\vec{x}_1$ et ses composantes locales seront $\sigma_{nn} = \sigma_{22}$ et $\sigma_{rn} = -\sigma_{12}$. Dans le plan de Mohr $O, \sigma_{nn}, \sigma_{rn}$ l'extrémité de son vecteur \vec{T}_2 se situera au point P_2 .

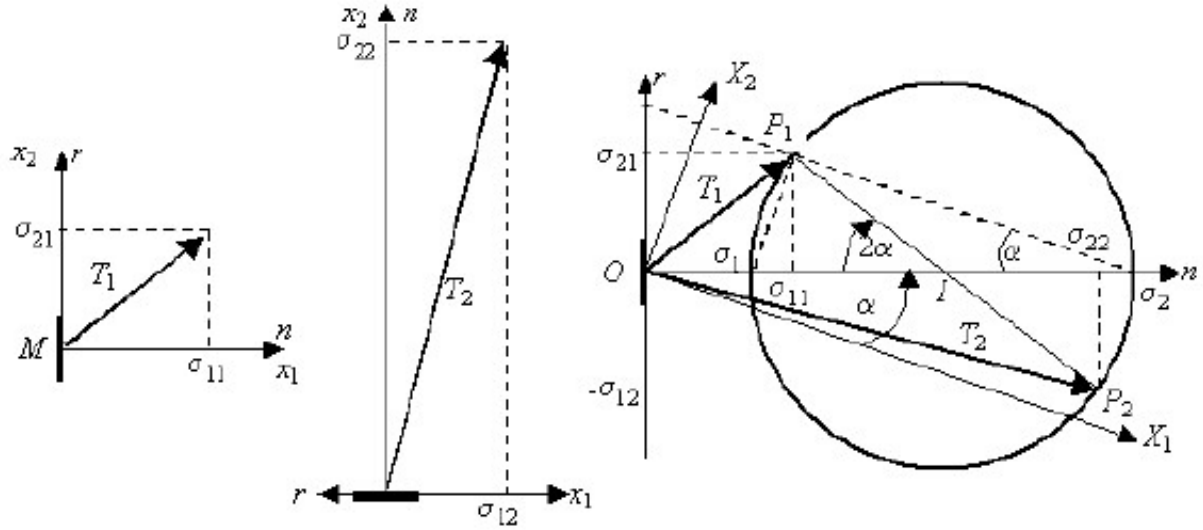


FIG. 2.10 – Construction du cercle de Mohr

Comme deux facettes perpendiculaires ont les extrémités de leur vecteur contrainte diamétralement opposées, le cercle de Mohr sera le cercle de diamètre P_1, P_2 centré sur $O\sigma_{nn}$ - puisque par symétrie de $\bar{\sigma}$: $\sigma_{12} = \sigma_{21}$ - au point I tel que $OI = \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22}}{2}$ et de rayon $R = \frac{1}{2}\sqrt{(\sigma_{22} - \sigma_{11})^2 + 4\sigma_{12}^2}$. Les contraintes principales $\sigma_1 = OI + R$ et $\sigma_2 = OI - R$ s'en déduisent immédiatement. L'angle *orienté* α entre le repère principal O, X_1, X_2 et le repère O, x_1, x_2 est déterminé par la relation $\text{tg} 2\alpha = \frac{2\sigma_{12}}{\sigma_{22} - \sigma_{11}}$.

– La position du centre du cercle conduit à l'égalité $OI = \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22}}{2} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}$

– Le cisaillement maximal, en valeur absolue égal à R , conduit à l'égalité $R = \frac{1}{2}\sqrt{(\sigma_{22} - \sigma_{11})^2 + 4\sigma_{12}^2} = \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{2}$

Ces deux égalités ne font que traduire les invariants tensoriels du sous tenseur $\bar{\sigma}$; En effet, par décomposition de $\bar{\sigma}$ en sphérique \bar{S} et en déviateur \bar{D} :

$$\bar{\sigma} = OI \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + R \begin{vmatrix} -\cos 2\alpha & \sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha & \cos 2\alpha \end{vmatrix} \quad \bar{\sigma} = OI \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + R \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}$$

dans le repère O, x_1, x_2 et dans le repère principal O, X_1, X_2 , on vérifie bien :

$$\text{Tr}(\bar{S}) = 2OI \quad \text{Det}(\bar{D}) = -R$$

Notons enfin que la représentation de Mohr, développée dans le cadre de la mécanique, est applicable dans tous les domaines de la physique où l'on manipule des tenseurs symétriques de rang 2 comme par exemple le tenseur des susceptibilités diélectriques.

Cisaillement pur

Le cas particulier du cisaillement pur correspond à $\sigma_1 = -\sigma_2$. La contrainte moyenne σ_m est nulle : $OI=0$. Les facettes orientées à $\frac{\pi}{4}$ des facettes principales sont soumises au seul cisaillement. Le tenseur des contraintes se réduit à son déviateur qui a pour expressions respectivement dans le repère principal M, X_1, X_2 et dans le repère à $\frac{\pi}{4}$: M, x_1, x_2 :

$$\bar{\sigma} = \begin{vmatrix} -\sigma & 0 \\ 0 & \sigma \end{vmatrix} \quad \bar{\sigma} = \begin{vmatrix} 0 & \sigma \\ \sigma & 0 \end{vmatrix}$$

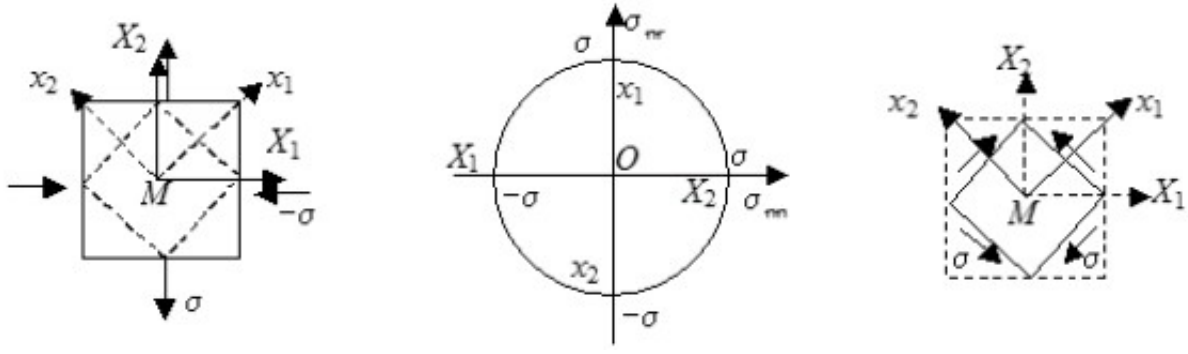


FIG. 2.11 – Cisaillement pur, repère principal : M, X_1, X_2 repère à $\frac{\pi}{4}$: M, x_1, x_2

2.3 La loi fondamentale de la dynamique

2.3.1 Equation de l'équilibre dynamique

Nous ne nous sommes préoccupés, jusqu'ici, que de l'équilibre mécanique *statique* d'une particule de matière centrée au point M soumise de la part du milieu environnant à des forces de contact caractérisées par leur densité surfacique $\vec{T}(M, \vec{n})$.

Il faut maintenant prendre en compte les forces de volume et d'accélération supportées par cette particule pour établir l'*équation de l'équilibre dynamique*. A l'échelle du milieu continu, ces forces seront caractérisées par leurs densités massiques :

- accélération : $\rho \vec{\gamma}(M)$
- force externe : $\rho \vec{X}(M)$

$\rho(M)$ étant la masse volumique du milieu matériel, $\vec{\gamma}(M)$ l'accélération et $\vec{X}(M)$ la densité massique de force externe auxquelles il est soumis.

En mécanique, la densité massique de force la plus fréquemment rencontrée est la gravité \vec{g} qui permet de prendre en compte l'effet de poids propre de la structure.

Équilibre mécanique global Isolons au sein d'un milieu matériel un volume V limité par une surface S . Ce volume est soumis aux densités massiques de forces externes $\vec{\gamma}$ et $\vec{X}(M)$ et à la densité surfacique de forces $\vec{T}(M, \vec{n})$ exercée par la matière environnante. La loi fondamentale de la dynamique $m \vec{\gamma} = \sum \vec{F}$ s'écrit sous la forme d'un bilan intégral étendu au volume V :

$$\int_V \rho \vec{\gamma} dV = \int_V \rho \vec{X} dV + \int_S \vec{T} dS$$

Comme les actions de contact sont liées par la relation $\vec{T} = \vec{\sigma} \cdot \vec{n}$, le théorème de la divergence permet de transformer l'intégrale sur S en intégrale sur V

$$\int_S \vec{T} dS = \int_S \vec{\sigma} \cdot \vec{n} dS = \int_V \mathbf{Div}(\vec{\sigma}) dV$$

et le bilan s'écrit :

$$\int_V \rho \vec{\gamma} dV = \int_V \rho \vec{X} dV + \int_V \mathbf{Div}(\vec{\sigma}) dV$$

Ce bilan étant indépendant du volume V choisi, il en résulte l'équation de l'équilibre dynamique :

$$\mathbf{Div} \vec{\sigma} + \rho \vec{X} - \rho \vec{\gamma} = 0 \quad (2.18)$$

Équilibre mécanique local Cette équation s'établit également en considérant l'équilibre d'une particule parallélépipède de masse volumique ρ et de volume élémentaire $dV = dx_1 dx_2 dx_3$ centrée au point M où l'état de contrainte est caractérisé par le tenseur $\vec{\sigma}$, la densité massique de force externe par \vec{X} et l'accélération par $\vec{\gamma}$:

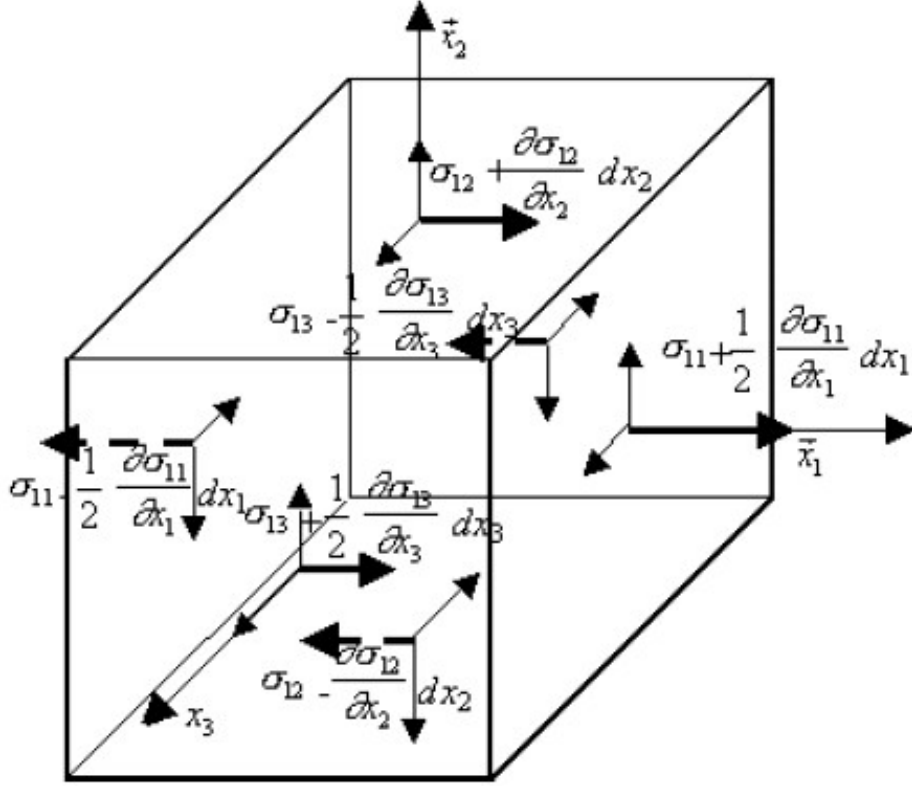


FIG. 2.12 – Équilibre dynamique d'une particule de matière

$$\rho \vec{\gamma} dV = \rho \vec{X} dV + \sum_{faces} \vec{T} dS$$

En projection sur l'axe x_1 , l'équilibre des forces :

$$\begin{aligned} \sum_{faces} \vec{T} dS = & \{ [\sigma_{11} + \frac{1}{2} \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1}] - [\sigma_{11} - \frac{1}{2} \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1}] \} dx_2 dx_3 \\ & + \{ [\sigma_{12} + \frac{1}{2} \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2}] - [\sigma_{12} - \frac{1}{2} \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2}] \} dx_1 dx_3 \\ & + \{ [\sigma_{13} + \frac{1}{2} \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_3}] - [\sigma_{13} - \frac{1}{2} \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_3}] \} dx_1 dx_2 \end{aligned}$$

$$\sum_{faces} \vec{T} dS = \frac{\partial \sigma_{1j}}{\partial x_j} dV = [\mathbf{Div} \vec{\sigma}]_{composante_1} dV$$

En regroupant les 3 projections on retrouve l'équation (2.18) de l'équilibre dynamique sous la forme de 3 équations différentielles scalaires qui s'écrivent en coordonnées cartésiennes :

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \rho X_i - \rho \gamma_i = 0 \quad (2.19)$$

avec sommation sur l'indice j répété selon la convention d'Einstein dite des *indices muets*.

Notons que cette équation ne fait pas appel à la nature du milieu considéré, celle-ci étant prise en compte dans l'équation d'état ou loi de comportement du matériau. Ainsi, en hydrostatique, la loi de comportement s'écrit $[\vec{\sigma}] = -p\vec{\delta}$, $\vec{\gamma} = 0$, $\vec{X} = \rho\vec{g}$ et l'équation de l'équilibre conduit à l'équation de l'hydrostatique $\mathbf{Div}(-p\vec{\delta}) + \rho\vec{g} = -\vec{\nabla}p + \rho\vec{g} = 0$ qui ne s'applique qu'aux fluides au repos.

2.3.2 Conditions aux limites

L'équation de l'équilibre dynamique est l'équation différentielle qui régit l'évolution spatiale de l'état de contrainte caractérisé par le tenseur $\bar{\sigma}$ au sein de la matière. Pour déterminer l'état de contrainte régnant en tout point d'une structure, il faut établir la solution de cette équation qui vérifie les conditions imposées - généralement en terme de forces externes et de déplacement - à sa périphérie.

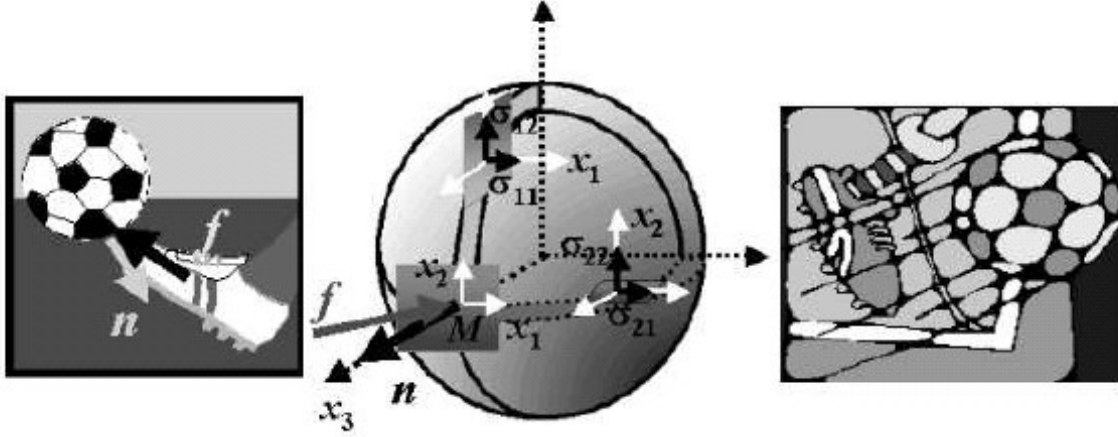


FIG. 2.13 – Conditions aux limites

Prenons l'exemple d'un ballon de football. Lorsque le joueur frappe le ballon, la pointe de sa chaussure exerce une densité surfacique de force \vec{f} sur la zone d'impact. \vec{n} étant la normale extérieure au point M de la surface impactée du ballon, l'équilibre mécanique impose que le vecteur contrainte associé $\vec{T}(M, \vec{n})$ soit égal à \vec{f} .

$$\vec{T}(M, \vec{n}) = \bar{\sigma}(M) \cdot \vec{n} = \vec{f} \quad (2.20)$$

Au point M en orientant la normale extérieure au ballon \vec{n} selon Ox_3 , la condition aux limites impose les valeurs de σ_{13} , σ_{23} et σ_{33}

$$\vec{T}(M, \vec{n}) = \begin{vmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{vmatrix} \implies \bar{\sigma}(M) = \begin{vmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & f_1 \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & f_2 \\ f_1 & f_2 & f_3 \end{vmatrix}$$

Mais après l'impact, dès que le ballon est en vol, $\vec{f} \equiv 0$ et la normale extérieure \vec{n} à la surface du ballon est direction *principale* à valeur propre *nulle*. Il en est de même pour toute surface *libre de charge*.

Notons que les conditions aux limites n'impliquent aucune condition sur les valeurs des composantes de contrainte σ_{11} , σ_{22} et σ_{12} du sous tenseur associées aux facettes de normale perpendiculaire à \vec{n} . Ainsi, dans le cas du ballon, la pression de gonflage induit des contraintes de traction dans l'enveloppe qui confine l'air sous pression.

2.4 Les déformations

Sous l'action d'un chargement, tous les corps subissent un changement de forme, de position et d'orientation entre un état *initial* avant application de la charge et un état *final* consécutif à son application. Les déformations caractérisent le changement de forme local en tout point du matériau, indépendamment de sa nature et de ses caractéristiques de résistance.

2.4.1 État local de déformation

La transformation géométrique qui décrit le passage d'un petit élément de matière de l'état initial à l'état final se décompose en *Translation*, *Rotation* et *Déformation*, cette dernière étant seule responsable du *changement de forme* du petit élément. Translation et Rotation sont des mouvements de corps rigides qui traduisent les changements de position et d'orientation. Du point de vue de l'état *final*, Rotation et Déformation ne sont pas commutatives. Si l'on ne s'intéresse qu'au *changement de forme* du petit élément et non plus à sa position absolue les deux configurations finales sont *équivalentes pour un chargement donné*.

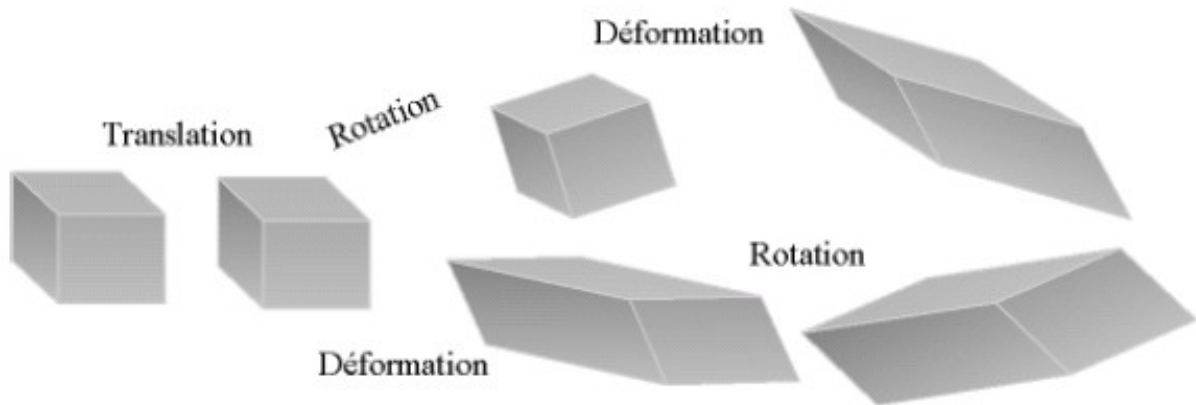


FIG. 2.14 – Transformation géométrique de passage entre l'état *initial* et l'état *final*

Seule la *Déformation* responsable des variations de longueur et des distorsions angulaires caractérise le changement de forme. Elle seule sera liée à la contrainte appliquée au travers de la loi de comportement du matériau. C'est la variable pertinente du mécanicien.

Petites et grandes déformations

Cependant, lors de l'application de deux chargements successifs, il faut tenir compte de l'ordre des chargements puisque le second agit sur un état *intermédiaire* - position, orientation et *forme* - induit par le premier, état qui devient le nouvel état de *référence* pour le calcul de la répartition des contraintes induit par le second chargement. Le calcul de la répartition des contraintes induit par le second chargement doit s'effectuer à partir de la forme *modifiée* par le premier. L'état de contrainte est donc différent de celui qui serait obtenu si le second chargement était appliqué à l'état *initial* sans tenir compte de la *Déformation* induite par le premier.

Ce n'est que dans le cas où les variations de position, orientation et forme seront suffisamment faibles que l'on pourra les négliger et considérer qu'en première approximation le second chargement agit également sur la géométrie *initiale*, négligeant les variations de géométrie induites par le premier chargement. Il faudra donc distinguer le cas des *petites déformations* comme celles des matériaux cristallins travaillant en régime élastique de celui des *grandes déformations* comme celles qui interviennent dans les opérations de formage et d'emboutissage des métaux en régime plastique ou celles des élastomères supportant de grandes déformations en régime élastique.

Principe de superposition

Une approche classique de résolution d'un problème mécanique - connue sous le nom de *Principe de superposition* - consiste à décomposer la sollicitation appliquée à une structure en une somme de sollicitations élémentaires pour lesquelles il est aisé de déterminer, à partir de la géométrie *initiale*, l'état de contrainte et la déformation induite correspondante, puis de déterminer l'état de déformation global par addition de ces états élémentaires de déformation. De part son principe même, cette approche se réfère toujours à la géométrie *initiale* et n'est donc applicable qu'en *petites déformations*.

Extension et glissement

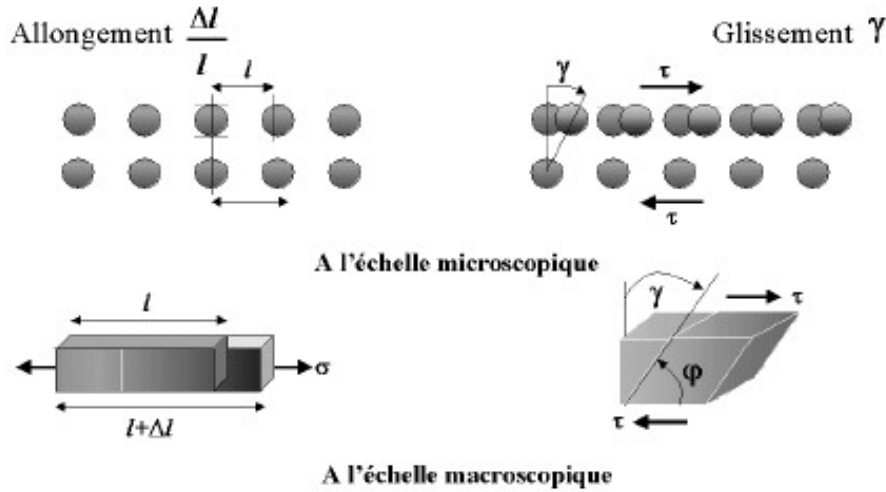


FIG. 2.15 – Extension et glissement

A l'échelle microscopique, le changement de forme se caractérise par un changement de longueur et un changement d'orientation des liaisons atomiques. A l'échelle macroscopique, lorsqu'une structure se déforme, un segment de longueur l voit varier sa longueur, mais aussi sa direction.

- La variation de longueur se caractérise par l'extension $e = \frac{l + \Delta l}{l}$ ou l'allongement relatif $\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}$.
- La variation de direction est pour sa part le résultat de la composition des deux opérations de *Rotation* et de *Déformation*. Afin de s'affranchir de la rotation et de ne retenir que la distorsion de forme, il suffit de suivre l'évolution au cours de la déformation de l'angle φ formé par deux directions *initialement* orthogonales. Le *glissement* γ est défini comme l'angle complémentaire $\varphi - \frac{\pi}{2}$.

L'allongement relatif ε étant défini par le rapport de deux longueurs et le glissement γ étant défini par un angle, la *déformation* est une grandeur *sans dimension*, donc *sans unité de mesure*.

2.4.2 Les grandes déformations

Nous nous limiterons à la présentation simplifiée dans un essai classique de traction. On enregistre l'allongement Δl d'une éprouvette de section initiale S_0 et de longueur initiale l_0 en fonction de la force appliquée F . Pour caractériser le comportement du matériau on s'affranchit de la géométrie de l'éprouvette en introduisant la contrainte nominale de traction $\sigma_n = \frac{F}{S_0}$ et l'extension (stretch) $e = \frac{l + \Delta l}{l} = 1 + \frac{\Delta l}{l} = 1 + \varepsilon_n$, $\varepsilon_n = \frac{\Delta l}{l}$ étant la déformation nominale d'extension. La courbe d'essai $F, \Delta l$ tracée dans le plan σ_n, ε_n est alors représentative du comportement en traction du seul matériau.

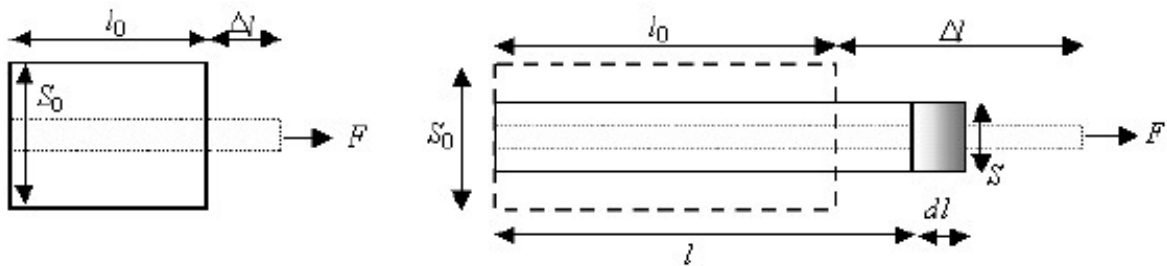


FIG. 2.16 – Déformations *nominale* et *vraie*

Tant que l'allongement Δl reste petit devant la longueur initiale l_0 , typiquement tant $\varepsilon_n < 1\%$, on peut négliger les variations de forme de l'éprouvette et les grandeurs nominales σ_n et ε_n sont

représentatives de l'état de contrainte et de déformation *vraies* du matériau. C'est le régime des *petites déformations*.

Cependant, lorsque l'éprouvette s'allonge de manière importante, comme c'est le cas pour les métaux en régime plastique pour lesquels la déformation nominale à rupture atteint quelques dizaines de % ou les élastomères en régime élastique pour lesquels elle peut atteindre quelques centaines de %, on constate expérimentalement que l'aire de section droite S décroît au fur et à mesure de l'allongement de l'éprouvette. Il est donc naturel, pour s'affranchir de la géométrie de l'éprouvette, de prendre à tout instant du chargement les dimensions vraies $S < S_0$ et $l > l_0$ pour définir les *vraies* contrainte et déformation. La définition de la déformation *vraie* devient incrémentale au sens où, sous l'action de la contrainte *vraie* $\sigma = \frac{F}{S}$ à un instant donné du chargement, le matériau subit un accroissement d'extension $de = \frac{l+dl}{l}$ auquel correspond l'accroissement de déformation vraie $d\varepsilon = \frac{dl}{l}$. La déformation vraie ε lorsque l'éprouvette s'est allongée de Δl s'obtient par intégration :

$$\varepsilon = \int_{l_0}^{l_0+\Delta l} \frac{dl}{l} = Ln(1 + \frac{\Delta l}{l}) = Ln(1 + \varepsilon_n) \quad (2.21)$$

C'est le régime des *grandes déformations*.

2.4.3 Les petites déformations

La plupart des structures étant constituées de matériaux cristallins peu déformables travaillant en régime élastique, l'approximation des petites déformations est largement suffisante. Elle offre de plus l'avantage du principe de superposition. Nous nous limiterons à la présentation de la théorie des petites déformations.

La trajectoire d'une particule

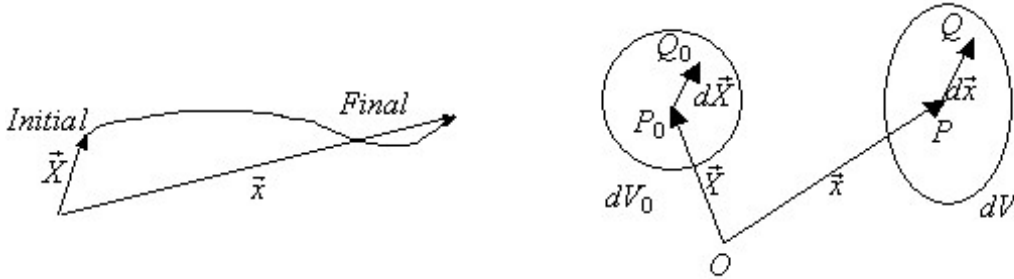


FIG. 2.17 – Trajectoire d'une particule et affinité tangente

Au cours de l'application du chargement une particule de matière de coordonnées initiales \vec{X} se déplace pour occuper une nouvelle position de coordonnées finales \vec{x} . La transformation géométrique qui définit le passage de l'état *initial de référence* à l'état *final déformé* est donc caractérisée dans un même repère fixe par la fonctionnelle vectorielle $\vec{x} = \vec{F}(\vec{X})$. Si l'on se limite à une petite région, boule de volume dV_0 autour d'un point matériel P_0 , le centre P_0 se *translate* en P et les points voisins Q_0 se déplacent en Q . Leur ensemble forme la boule *déformée* de volume dV . Un développement limité conduit à $d\vec{x} = \bar{\gamma}(\vec{X})d\vec{X}$ en appelant $\bar{\gamma}(\vec{X}) = \mathbf{Grad}\vec{F}(\vec{X})$ le tenseur gradient de la transformation au point P_0 . La relation :

$$d\vec{x} = \bar{\gamma}(\vec{X})d\vec{X} \quad dx_i = \frac{\partial x_i}{\partial X_j} dX_j \quad \mathbf{Det}(\bar{\gamma}) = \frac{dV}{dV_0} \quad (2.22)$$

définit l'*affinité tangente* à la transformation au point P_0 . Le *Jacobien* $\mathbf{Det}(\bar{\gamma})$ de la transformation étant par définition le rapport du volume dV de la boule *déformée* au volume dV_0 de la boule *initiale*. Notons que $\bar{\gamma}$ contient les informations locales de changement de forme (*déformation*) et d'orientation (*rotation*) de la boule initiale.

$$\underbrace{\frac{1}{2} \begin{vmatrix} 2G_{11} & G_{12} + G_{21} & G_{13} + G_{31} \\ G_{12} + G_{21} & 2G_{22} & G_{23} + G_{32} \\ G_{13} + G_{31} & G_{23} + G_{32} & 2G_{33} \end{vmatrix}}_{\bar{\varepsilon}} + \underbrace{\frac{1}{2} \begin{vmatrix} 0 & G_{12} - G_{21} & G_{13} - G_{31} \\ -(G_{12} - G_{21}) & 0 & G_{23} - G_{32} \\ -(G_{13} - G_{31}) & -(G_{23} - G_{32}) & 0 \end{vmatrix}}_{\bar{\Omega}}$$

$\bar{\varepsilon}$ et $\bar{\Omega}$ sont liés à \bar{G} par :

$$\bar{\varepsilon} = \frac{1}{2}(\bar{G} + {}^t\bar{G}) \quad \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j}{\partial X_i}\right) \quad \bar{\Omega} = \frac{1}{2}(\bar{G} - {}^t\bar{G}) \quad \Omega_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial X_j} - \frac{\partial u_j}{\partial X_i}\right) \quad (2.24)$$

avec, par construction :

$$\bar{\varepsilon} = {}^t\bar{\varepsilon} \quad \varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji} \quad \bar{\Omega} = -{}^t\bar{\Omega} \quad \Omega_{ij} = -\Omega_{ji}$$

- La partie *antisymétrique* $\bar{\Omega}$ qui ne comporte que trois composantes indépendantes induit dans la boule de centre P_0 un champ de déplacement $d\vec{u} = \bar{\Omega}d\vec{X}$ correspondant à la *rotation locale* de la boule de vecteur $\vec{\omega}$ tel que $d\vec{u} = \bar{\Omega}d\vec{X} = \vec{\omega} \wedge \vec{X}$. Le vecteur rotation locale $\vec{\omega}$ définissant l'axe, le sens et l'amplitude de la rotation locale a pour composantes $\omega_1 = -\Omega_{23}, \omega_2 = -\Omega_{31}$ et $\omega_3 = -\Omega_{12}$ soit $\omega_i = -\Omega_{jk}$ avec $\{i, j, k\}$ permutation circulaire du groupe $\{1, 2, 3\}$. C'est l'analogue du vecteur tourbillon des hydrodynamiciens.
- La partie *symétrique* $\bar{\varepsilon}$ qui ne comporte que six composantes indépendantes induit dans la boule de centre P_0 un champ de déplacement $d\vec{u} = \bar{\varepsilon}d\vec{X}$ correspondant à la *déformation locale*. Cette partie du champ de déplacement - associée à la *déformation pure* - est la seule responsable du changement de forme de la boule.

Le déplacement \vec{u} d'un point Q_0 de la boule est la somme :

$$\vec{u}(Q_0) = \underbrace{\vec{u}(P_0)}_{\text{Translation}} + \underbrace{\vec{\omega}(P_0) \wedge d\vec{X}}_{\text{Rotation}} + \underbrace{\bar{\varepsilon}(P_0)d\vec{X}}_{\text{Déformation}}$$

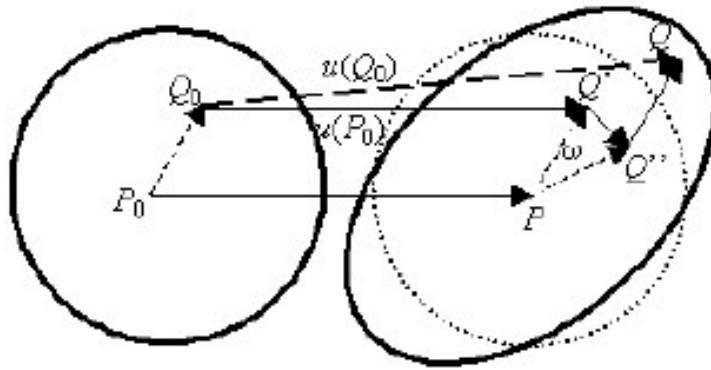


FIG. 2.19 – Déplacements de translation Q_0Q' , rotation $Q'Q''$ et déformation $Q''Q$

- d'un déplacement de corps rigide composé de la *translation* \vec{u}_0 du centre P_0 de la boule et de la *rotation locale* $\vec{\omega} \wedge \vec{X}$ de la boule autour du vecteur $\vec{\omega}(P_0)$ associé à la partie antisymétrique $\bar{\Omega}$.
- d'un déplacement $\bar{\varepsilon}d\vec{X}$ responsable du changement de forme par *déformation* associé à la partie symétrique $\bar{\varepsilon}(P_0)$

2.4.4 Le tenseur des déformations

Définition

Dans le cadre de la théorie des petites déformations, l'état de déformation en un point M est donc caractérisé par le tenseur *symétrique* $\bar{\varepsilon}(M)$ et la relation donnant le déplacement d'extrémité $\vec{u}(M, \vec{l})$ d'un segment unitaire d'origine M et de direction \vec{l} est donnée par :

$$\vec{u}(M, \vec{l}) = \bar{\varepsilon}(M) \vec{l} \quad (2.25)$$

$\bar{\varepsilon}(M)$ caractérise au point M la relation entre les vecteurs déplacement \vec{u} de segments unitaires de différentes orientations \vec{l} . Comme dans le cas du tenseur des contraintes, la connaissance des vecteurs déplacement d'extrémité u_1, u_2 et u_3 de trois segments orthogonaux de longueur unitaire d'origine M respectivement orientés selon les axes Mx_1, Mx_2 et Mx_3 suffit à déterminer en ce point M l'état de déformation. la relation (2.25) entre $\vec{u}(M, \vec{l})$ et \vec{l} s'écrit de manière générale à l'aide du tenseur $\bar{\varepsilon}(M)$ dont les composantes dans le repère M, x_1, x_2, x_3 sont :

$$\bar{\varepsilon}(M) = \begin{vmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{vmatrix}$$

Repère local, extension, distorsion et glissement

Au point M où l'état local de déformation est caractérisé par le tenseur $\bar{\varepsilon}(M)$, le déplacement d'extrémité $\vec{u}(M, \vec{l})$ d'un segment unitaire d'origine M orienté dans la direction \vec{l} induit d'une part une variation de la longueur du segment et d'autre part un changement d'orientation. Pour caractériser ces deux effets, introduisons le repère *local* trièdre direct $M, \vec{l}, \vec{r}, \vec{t}$ associé à la direction \vec{l} tel \vec{l}, \vec{r} et \vec{t} soient coplanaires.

Dans ce repère les composantes du vecteur déplacement $\vec{u}(M, \vec{l})$ sont $\varepsilon_{ll}, \varepsilon_{rl}, \varepsilon_{tl}$, le premier indice faisant référence à l'axe de projection, le second à l'orientation \vec{l} du segment. Par construction on a toujours $\varepsilon_{tl} = 0$ et les composantes non nulles de \vec{u} sont sa composante normale $\varepsilon_{ll} = \vec{u}(M, \vec{l}) \cdot \vec{l}$ selon \vec{l} appelée *extension* et sa composante perpendiculaire $\varepsilon_{rl} = \vec{u}(M, \vec{l}) \cdot \vec{r}$ située dans le plan de glissement \vec{l}, \vec{r} appelée *distorsion*.

déformation normale ε_{ll} C'est la composante de \vec{u} qui étire lorsqu'elle est parallèle à \vec{l} ou qui contracte si elle est antiparallèle à \vec{l} . Le signe de ε_{ll} est donc *intrinsèque* : $\varepsilon_{ll} > 0$ pour l'*extension* et $\varepsilon_{ll} < 0$ pour la *contraction*.

En petites déformations, elle caractérise le changement de longueur du segment car :

$$\vec{l}' = \vec{l} + \vec{u}(M, \vec{l}) = l + \varepsilon_{ll} \vec{l} + \varepsilon_{rl} \vec{r} \quad |\vec{l}'| = \sqrt{(1 + \varepsilon_{ll})^2 + \varepsilon_{rl}^2} \simeq 1 + \varepsilon_{ll}$$

déformation de distorsion ε_{rl} C'est la composante de \vec{u} qui change l'orientation de l en la faisant tourner dans le plan de glissement \vec{l}, \vec{r} . En petites déformations, elle caractérise la variation d'orientation du segment car :

$$\text{tg} \alpha = \frac{\varepsilon_{rl}}{1 + \varepsilon_{ll}} \quad \alpha \simeq \varepsilon_{rl}$$

ce qui revient à confondre le pied C de l'arc BC et celui H de la perpendiculaire BH et à assimiler la distorsion ε_{rl} à l'angle α

Rappelons que nous ne nous intéressons ici qu'à l'effet de la *déformation pure*. A ce changement de direction il faut ajouter celui induit par la *rotation locale* pour définir de manière *absolue* la nouvelle direction de \vec{l} .

Pour un segment unitaire orienté selon la direction perpendiculaire \vec{r} on obtiendrait de la même manière dans **son repère local** $\vec{r}, -\vec{l}$ les composantes locales ε_{rr} et ε_{lr} . La symétrie de la déformation pure ${}^t\bar{\varepsilon} = \bar{\varepsilon}$ impliquant la relation $\varepsilon_{lr} = -\varepsilon_{rl}$



FIG. 2.20 – Petites déformations, distorsion et glissement

Les directions l et r étant initialement perpendiculaires, leurs déformées l' et r' font un angle φ relié au glissement γ_{lr} par $\gamma_{lr} = \varphi - \frac{\pi}{2}$. Soit $\vec{l}' \cdot \vec{r}' = -|\vec{l}'||\vec{r}'| \sin \gamma_{lr}$. Au premier ordre $\sin \gamma_{lr} \simeq \gamma_{lr}$, $|\vec{l}'| = |\vec{l}|(1 + \varepsilon_{ll}) \simeq |\vec{l}|$ et de la même manière $|\vec{r}'| \simeq |\vec{r}|$. Comme par ailleurs $\vec{l}' \cdot \vec{r}' = (\vec{l} + \vec{u}(\vec{l})) \cdot (\vec{r} + \vec{u}(\vec{r})) = \vec{u}(\vec{l}) \cdot \vec{r} + \vec{l} \cdot \vec{u}(\vec{r}) + \vec{u}(\vec{l}) \cdot \vec{u}(\vec{r}) \simeq \vec{u}(\vec{l}) \cdot \vec{r} + \vec{l} \cdot \vec{u}(\vec{r}) = \varepsilon_{rl} - \varepsilon_{lr} = -2\varepsilon_{lr} = 2\varepsilon_{lr}$ puisque $\vec{l} \cdot \vec{r} = 0$, le *glissement* est égal au *double* de la *distorsion*.

2.4.5 Propriétés du tenseur des déformations

Le tenseur $\bar{\bar{\varepsilon}}(M)$ définissant l'état de déformation en un point M est un opérateur *intrinsèque*, *symétrique* par construction, qui lie le vecteur déplacement d'extrémité $\vec{u}(M, \vec{l})$ du segment unitaire \vec{l} d'origine M à son orientation. Cette définition est *indépendante* du repère choisi, seule sa représentation, les valeurs de ses composantes, dépend du repère.

Comme le tenseur des contraintes, il possède les propriétés communes aux tenseur symétriques de rang 2. Toutes les propriétés du tenseur des contraintes $\bar{\sigma}$ - en particulier : valeurs principales, directions principales, invariants, sphérique et déviateur - (cf. section 2.2.3) s'appliquent au tenseur des déformations $\bar{\bar{\varepsilon}}$. Il suffit de remplacer la normale \vec{n} à la facette par le segment \vec{l} et le vecteur contrainte $\vec{T}(M, \vec{n})$ par le vecteur déplacement d'extrémité $\vec{u}(M, \vec{l})$.

La décomposition en sphérique et déviateur $\bar{\bar{\varepsilon}} = \bar{\bar{S}} + \bar{\bar{D}} = \varepsilon_m \bar{\bar{\delta}} + \varepsilon_d \bar{\bar{\pi}}$ admet une interprétation simple, mais physiquement fondamentale. La variation relative de volume $\theta = \frac{dV}{V}$ d'une particule au cours d'une petite déformation est l'invariant $\theta = 3\varepsilon_m = \text{Tr}(\bar{\bar{\varepsilon}})$. En effet la longueur déformée d'un segment unitaire d'orientation $\vec{l}_i = \vec{x}_i$ étant $l'_i = 1 + \varepsilon_{ii}$, la variation de volume dV d'un cube d'arête unité sera $(1 + \varepsilon_{11})(1 + \varepsilon_{22})(1 + \varepsilon_{33}) - 1 = \text{Tr}(\bar{\bar{\varepsilon}})$. La déformation sera donc la somme :

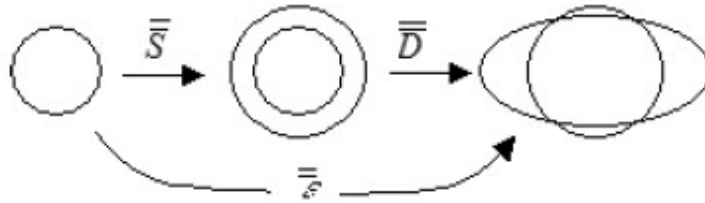


FIG. 2.21 – Changement de volume et changement de forme

- d'une déformation sphérique *isotrope* ($\bar{\bar{S}}$) (gonflement ou dégonflement) caractérisé par l'extension moyenne ε_m prenant en compte la *variation totale de volume* $\theta = 3\varepsilon_m = \text{Tr}(\bar{\bar{\varepsilon}})$ à *forme constante*.
- d'une déformation déviatrice *anisotrope* ($\bar{\bar{D}}$) prenant en compte le *changement de forme* à *volume constant* ($\text{Tr}(\bar{\bar{D}}) = 0$).

Du point de vue des matériaux, si la déformation élastique induit toujours, sauf cas particuliers, un changement de volume, la déformation plastique s'effectue au contraire à volume constant et ne fait intervenir que le déviateur des déformations.

2.4.6 Représentation des déformations

Les représentations du tenseur des contraintes ($\bar{\sigma}$) sont évidemment transposables au tenseur des déformations ($\bar{\varepsilon}$) (cf. section 2.2.4).

La représentation de Mohr dans un plan principal de déformation permet de dessiner directement la

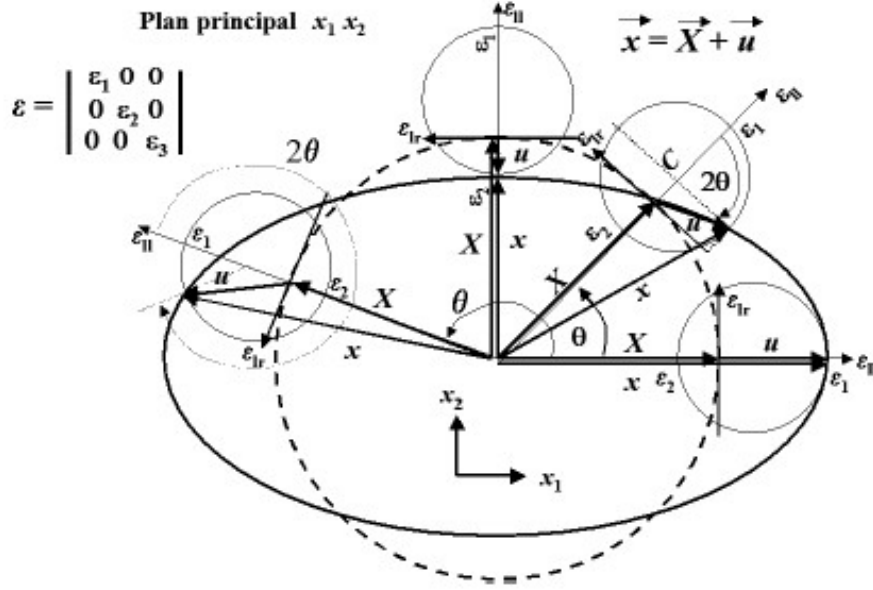


FIG. 2.22 – Affinité : la transformation d'un cercle en une ellipse

section déformée d'une particule dans le plan principal. Le cercle de rayon unité est déformé en une ellipse de demi axes principaux $1 + \varepsilon_1, 1 + \varepsilon_2$

2.5 Continuité et compatibilité des déformations

Revenons un instant au cas général de la transformation *affine tangente* (équation : 2.22) qui décrit l'évolution d'une particule de matière de volume dV au cours de l'application d'un chargement. Pour que cette transformation existe, il faut qu'il y ait correspondance *biunivoque* entre chaque point matériel du domaine dans l'état *initial* et dans l'état *final*, ce qui implique que $\frac{dV}{dV_0} = \mathbf{Det} \bar{\gamma}$ soit strictement positif. $\mathbf{Det} \bar{\gamma} > 0$ n'est autre que l'expression de la *condition de continuité* sur laquelle est basée la mécanique des milieux continus. En découlent les conséquences suivantes :

1. Tous points matériels formant un ensemble connexe (volume, surface, courbe) forment toujours un ensemble connexe de même nature au cours de la distorsion.
2. Tout point matériel situé à l'intérieur d'une surface fermée reste à l'intérieur de cette surface transformée par la distorsion.
3. Les points matériels qui forment dans la configuration de référence la frontière d'un milieu continu en forment encore la frontière quelque soit l'évolution de la distorsion.
4. La masse contenue à l'intérieur d'une surface matérielle fermée reste constante au cours de la distorsion. Par surface matérielle on entend une surface constituée toujours par les mêmes points matériels, surface qui se déplace et se déforme par rapport au référentiel (aspect *Lagrangien*). Ce terme s'oppose au terme de surface géométrique qui désigne une surface invariable par rapport au référentiel. Au cours de la distorsion les points matériels traversent la surface géométrique (aspect *Eulérien*).

La conservation de la masse (dans le référentiel fixe) : $dm = \rho dV = \rho_0 dV_0$ permet d'écrire la *condition de continuité* sous la forme :

$$\rho \mathbf{Det} \bar{\gamma} = \rho_0 \quad \rho - \rho_0 + \rho (\mathbf{Det} \bar{\gamma} - 1) = 0$$

- En mécanique des fluides $\bar{\gamma} - \bar{\delta} = \mathbf{Grad} \bar{v} dt$. Pour $dt \rightarrow 0$, $\mathbf{Det} \bar{\gamma} - 1 = \mathbf{Det}(\bar{\delta} + \mathbf{Grad} \bar{v} dt) - 1$ se réduit, en ne gardant que les termes du premier ordre du développement, à $\mathbf{Tr}(\mathbf{Grad} \bar{v} dt) = \mathbf{Div} \bar{v} dt$. La variation de masse volumique $D\rho = \rho - \rho_0$, en suivant les particules de matière, conduit à l'expression de l'équation *lagrangienne* de conservation de la masse :

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \mathbf{Div} \bar{v} = 0$$

- En Mécanique des solides, où les atomes sont astreints à rester sur le réseau cristallin, on ne peut pas découpler *Rotation locale* et *Déformation* et la continuité de la matière implique des *restrictions* sur la manière dont évolue l'état de déformation d'un point à un autre.

En petites déformations, si l'on applique une transformation $d\bar{u} = \bar{G}d\bar{X} = (\bar{\Omega} + \bar{\varepsilon})d\bar{X}$ va-

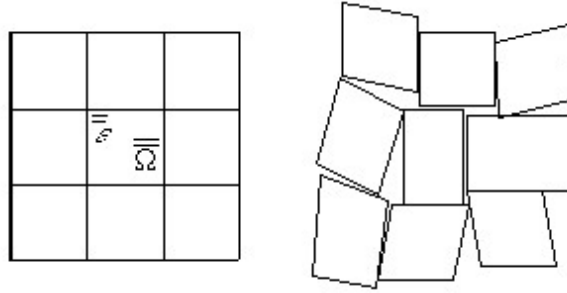


FIG. 2.23 – Continuité : compatibilité des déformations

riant *aléatoirement* d'une particule matérielle à une autre, la déformée ne sera pas continue. Pour assurer cette continuité, il faut que $d\bar{u}$ soit une différentielle exacte, c'est à dire que \bar{G} s'identifie à $\mathbf{Grad} \bar{u}$, ce qui implique que $\mathbf{Rot}_D \bar{G} = 0$, soit $\mathbf{Rot}_D(\bar{\varepsilon} + \bar{\Omega}) = 0$. L'intégrabilité portera à la fois sur $\bar{\varepsilon}$ et $\bar{\Omega}$, mais comme les deux grandeurs ne sont pas indépendantes, la condition d'intégrabilité peut s'écrire uniquement en terme de $\bar{\varepsilon}$, la grandeur de référence du mécanicien. Cette condition s'écrit sous la forme de six équations différentielles aux dérivées partielles secondes des composantes de $\bar{\varepsilon}$:

$$\mathbf{Inc}(\bar{\varepsilon}) = \mathbf{Rot}_D(\mathbf{Rot}_G(\bar{\varepsilon})) = \mathbf{Rot}_G(\mathbf{Rot}_D(\bar{\varepsilon})) = \bar{0} \quad \mathbf{Inc}_{ij}(\bar{\varepsilon}) = \delta_{ipq}\delta_{jrs} \frac{\partial^2 \varepsilon_{pr}}{\partial x_q \partial x_s} \quad (2.26)$$

δ_{ijk} étant la composante du tenseur $\bar{\delta}$ complètement antisymétrique de rang 3 telle que :

$$\begin{aligned} \delta_{ijk} &= +1 \text{ si } \{ijk\} \text{ est une permutation } \textit{paire} \text{ du groupe } \{123\} \\ \delta_{ijk} &= -1 \text{ si } \{ijk\} \text{ est une permutation } \textit{impaire} \text{ du groupe } \{123\} \\ \delta_{ijk} &= 0 \text{ dans tous les autres cas } (\delta_{ijk} \text{ comporte au moins deux indices égaux}). \end{aligned}$$

2.6 Lois de comportement : relations contraintes - déformations

En aucun cas nous n'avons fait appel jusqu'ici à la nature et aux propriétés mécaniques du matériau. Pour établir la relation entre le changement de forme d'une structure et les efforts qui lui sont appliqués, *i.e.* la relation *Contraintes - Déformations*, et l'usage que fera le matériau du travail qui lui est fourni, il faut faire appel à la *loi de comportement* du matériau, son équation d'état en termes de σ et ε vraies qui s'écrit de manière générale comme une *fonctionnelle tensorielle* des tenseurs de contrainte et de déformation et de leurs dérivées temporelles :

$$\mathcal{F}\{\bar{\sigma}, \frac{d\bar{\sigma}}{dt}, \dots, \bar{\varepsilon}, \frac{d\bar{\varepsilon}}{dt}, \dots\} = 0$$

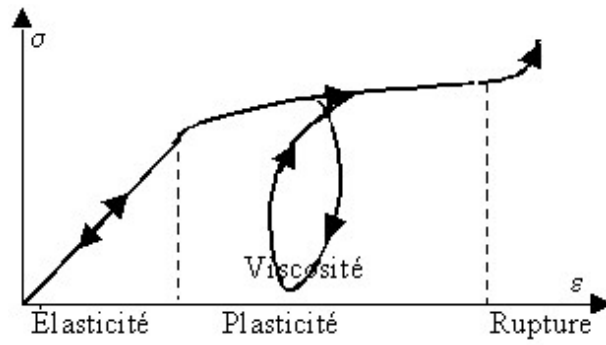
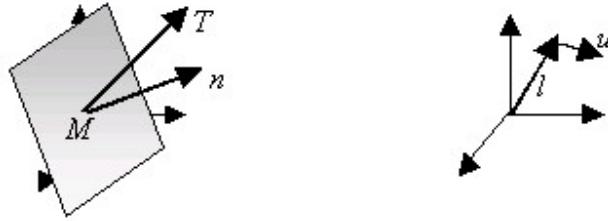


FIG. 2.24 – Comportement caractéristique d'un matériau en traction

2.7 Résumé Contraintes - Déformations



Description de l'État Mécanique Local

Contrainte		Déformation
$\vec{T}(M, \vec{n}) = \bar{\sigma} \vec{n}$	Définition	$\vec{u}(M, \vec{l}) = \bar{\varepsilon} \vec{l}$
$\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$	Symétrie	$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji}$

Principe Fondamental de la Dynamique Relation Déformation - Déplacement

$$\mathbf{Div} \bar{\sigma} + \rho \vec{X} = \rho \vec{\gamma}$$

$$2\bar{\varepsilon} = \mathbf{Grad} \vec{u} + {}^t \mathbf{Grad} \vec{u}$$

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \rho X_i = \rho \gamma_i$$

$$\frac{dV}{V} = \mathbf{Tr} \bar{\varepsilon} = \mathbf{div} \vec{u}$$

Conditions aux Limites

Conservation de la Masse

$$\bar{\sigma}(M) \vec{n} = \vec{f}$$

$$\mathbf{Inc}_{ij}(\bar{\varepsilon}) = \delta_{ipq} \delta_{jrs} \frac{\partial^2 \varepsilon_{pr}}{\partial x_q \partial x_s}$$

Description Indépendante du Comportement du Matériau

Equation d'État du Matériau

$$\mathcal{F}\left\{\bar{\sigma}, \frac{d\bar{\sigma}}{dt}, \dots, \bar{\varepsilon}, \frac{d\bar{\varepsilon}}{dt}, \dots\right\} = 0$$

Description du Comportement du Matériau en σ et ε vraies.

Chapitre 3

ÉLASTICITÉ

L'expérience montre que si la déformation du matériau est suffisamment faible, il reprend son état primitif non déformé lors de la suppression des efforts extérieurs ayant provoqué sa déformation. Le comportement élastique parfait correspond à une réversibilité mécanique parfaite. Le tenseur des déformations $\bar{\epsilon}$ est alors une variable d'état et sa donnée détermine, de manière biunivoque, le tenseur des contraintes $\bar{\sigma}$. Le travail de déformation développé entre deux états d'équilibre est alors indépendant du chemin suivi entre ces deux états.

3.1 Le travail de déformation

3.1.1 Le travail virtuel de déformation

Le travail de déformation est défini comme celui des forces externes et d'inertie. Si le champ de déplacement se réduit à un mouvement de corps rigide, translation et rotation qui n'induisent pas de variation des forces internes, le travail de déformation est nul. Au sein d'un matériau isolons un

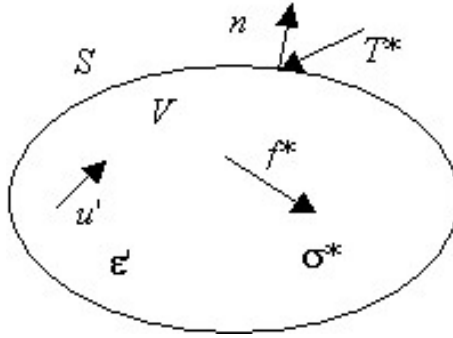


FIG. 3.1 – Travail de déformation

volume V de matière limité par une surface S soumis aux efforts *virtuels* :

- volumiques : inertie $-\rho\vec{\gamma}^*$ et externe $\rho\vec{X}^*$ regroupés sous la forme de la densité volumique de force \vec{f}^*
- surfaciques : action \vec{T}^* des parties environnantes

Le travail *virtuel* de déformation W dans le champ de déplacement *virtuel* \vec{u}' s'écrit :

$$W = \int_V \vec{f}^* \cdot \vec{u}' dV + \int_S \vec{T}^* \cdot \vec{u}' dS$$

Au système de forces \vec{f}^*, \vec{T}^* est associé au sein de la matière un tenseur des contraintes $\bar{\sigma}^*$ *statiquement admissible*, c'est à dire vérifiant en volume l'équation fondamentale de la dynamique $\text{Div} \bar{\sigma}^* + \vec{f}^* = 0$ et en surface les conditions aux limites $\vec{T}^* = \bar{\sigma}^* \cdot \vec{n}$.

Au déplacement \vec{u}' cinématiquement admissible continu et dérivable est associé le tenseur des déformations $\bar{\bar{\varepsilon}}'$.

Le travail de déformation W peut alors s'écrire :

$$\begin{aligned}
 W &= \int_V \vec{f}^* \vec{u}' dV + \int_S \vec{u}' \bar{\sigma}^* \vec{n} dS & W &= \int_V f_i^* u'_i dV + \int_S \sigma_{ij}^* u'_i n_j dS \\
 &= \int_V [\vec{f}^* \vec{u}' + \text{Div}(\bar{\sigma}^*) \vec{u}'] dV & &= \int_V [f_i^* u'_i + \frac{d(\sigma_{ij}^* u'_i)}{dx_j}] dV \\
 &= \int_V (\vec{f}^* + \text{Div}(\bar{\sigma}^*)) \vec{u}' dV + \int_V \text{Tr}(\bar{\sigma}^{*t} \text{Grad} \vec{u}') dV & &= \int_V (f_i^* + \frac{\partial \sigma_{ij}^*}{\partial x_j}) u'_i dV + \int_V \sigma_{ij}^* \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} dV \\
 &= \int_V \text{Tr}(\bar{\sigma}^* \bar{\bar{\varepsilon}}') dV - \int_V \text{Tr}(\bar{\sigma}^* \bar{\bar{\Omega}}') dV & &= \int_V \sigma_{ij}^* \varepsilon'_{ij} dV - \int_V \sigma_{ij}^* \Omega'_{ij} dV \\
 W &= \int_V \text{Tr}(\bar{\sigma}^* \bar{\bar{\varepsilon}}') dV & W &= \int_V \sigma_{ij}^* \varepsilon'_{ij} dV
 \end{aligned}$$

Le travail *virtuel* de déformation W peut donc s'écrire soit en terme de forces externes, soit en terme de forces internes :

$$W = \int_V \text{Tr}(\bar{\sigma}^* \bar{\bar{\varepsilon}}') dV = \int_V \vec{f}^* \vec{u}' dV + \int_S \vec{T}^* \vec{u}' dS \quad (3.1)$$

et sa densité volumique $\frac{dW}{dV}$ s'écrit sous la forme :

$$\frac{dW}{dV} = \text{Tr}(\bar{\sigma}^* \bar{\bar{\varepsilon}}') \quad (3.2)$$

3.1.2 Les potentiels élastiques

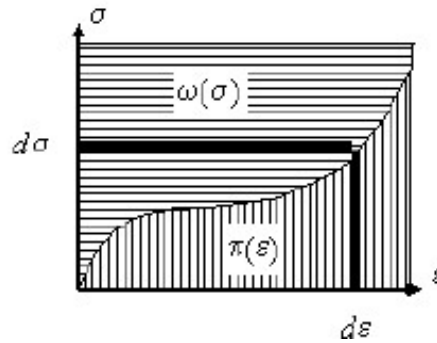


FIG. 3.2 – Potentiels d'élasticité parfaite

Pour une évolution réelle d'un état d'équilibre $(\bar{\sigma}, \bar{\bar{\varepsilon}})$ à un état d'équilibre voisin $(\bar{\sigma} + d\bar{\sigma}, \bar{\bar{\varepsilon}} + d\bar{\bar{\varepsilon}})$, selon la variable d'état choisie, on pourra définir deux densités volumiques de potentiel :

- Avec $\bar{\sigma}^* = \bar{\sigma}$ et $\bar{\bar{\varepsilon}}' = d\bar{\bar{\varepsilon}}$, la densité volumique de *potentiel d'élasticité* $\pi(\bar{\bar{\varepsilon}})$ se définit par :

$$d\pi = \text{Tr}(\bar{\sigma} d\bar{\bar{\varepsilon}}) \quad \bar{\sigma} = \frac{\partial \pi}{\partial \bar{\bar{\varepsilon}}} \quad \sigma_{ij} = \frac{\partial \pi}{\partial \varepsilon_{ij}} \quad (3.3)$$

Le tenseur des déformations $\bar{\bar{\varepsilon}}$ est alors une variable d'état et sa donnée détermine de manière biunivoque le tenseur des contraintes. $\bar{\sigma}$

- Avec $\bar{\bar{\varepsilon}}' = \bar{\bar{\varepsilon}}$ et $\bar{\sigma}^* = d\bar{\sigma}$, la densité volumique de *potentiel complémentaire* $\omega(\bar{\sigma})$ se définit par :

$$d\omega = \text{Tr}(\bar{\bar{\varepsilon}} d\bar{\sigma}) \quad \bar{\bar{\varepsilon}} = \frac{\partial \omega}{\partial \bar{\sigma}} \quad \varepsilon_{ij} = \frac{\partial \omega}{\partial \sigma_{ij}} \quad (3.4)$$

Le tenseur des contraintes $\bar{\sigma}$ est également une variable d'état et sa donnée détermine de manière biunivoque le tenseur des déformations $\bar{\bar{\varepsilon}}$.

Ces potentiels sont liés par les relations $d(\pi + \omega) = d\mathbf{Tr}(\bar{\sigma}\bar{\varepsilon})$.

Par intégration à partir d'un état de référence sans contrainte ni déformation initiales :

$$\pi(\bar{\varepsilon}) = \int_0^{\bar{\varepsilon}} \mathbf{Tr}(\bar{\sigma}d\bar{\varepsilon}) \quad \omega(\bar{\sigma}) = \int_0^{\bar{\sigma}} \mathbf{Tr}(\bar{\varepsilon}d\bar{\sigma}) \quad \frac{dW}{dV} = \pi(\bar{\varepsilon}) + \omega(\bar{\sigma}) = \mathbf{Tr}(\bar{\sigma}\bar{\varepsilon}) \quad (3.5)$$

Cf. Figure 3.2. Le *potentiel d'élasticité* ou *potentiel des déformations* $\pi(\bar{\varepsilon})$ représente la **densité volumique d'énergie élastique** stockée dans le milieu sous l'action des forces externes.

3.1.3 Relation avec la thermodynamique

La définition du travail de déformation est purement mécanique et ne peut avoir de relation avec les fonctions thermodynamiques que pour des situations thermiques particulières, en pratique essentiellement dans des conditions isothermes ou adiabatiques.

Premier principe

En appelant \mathcal{E} , \mathcal{F} et \mathcal{S} les densités **volumiques** d'énergie interne, d'énergie libre et d'entropie et T la température absolue le premier principe de la thermodynamique appliqué à une particule de volume V limité par une surface S indique que la variation infinitésimale d'énergie interne est égale à la différence entre la quantité de chaleur reçue et le travail des forces internes. Il s'écrit :

$$\int_V \delta\mathcal{E}dV = \int_V \delta QdV - \delta \int_S \vec{q} \cdot \vec{n}dS + \int_V \delta WdV$$

δQ étant la densité volumique de quantité de chaleur reçue et \vec{q} le flux de chaleur sortant. Compte tenu de la relation (3.3) et de $\int_S \vec{q} \cdot \vec{n}dS = \int_V \mathbf{Div} \vec{q}dV$, lors d'une variation de déformation $\delta\bar{\varepsilon}$ le premier principe implique la relation :

$$\delta\mathcal{E} = \mathbf{Tr}(\bar{\sigma} \bullet \delta\bar{\varepsilon}) + \delta Q - \delta \mathbf{Div} \vec{q} \quad (3.6)$$

Second principe

Pour la particule le second principe s'écrit :

$$\int_V \delta\mathcal{S}dV - \int_V \frac{\delta Q}{T}dV + \delta \int_S \frac{\vec{q}}{T} \cdot \vec{n}dS \geq 0$$

Avec $\int_S \frac{\vec{q}}{T} \cdot \vec{n}dS = \int_V \mathbf{Div} \frac{\vec{q}}{T}dV$, $\mathcal{F} = \mathcal{E} - T\mathcal{S}$ et $\mathbf{Div} \frac{\vec{q}}{T} = \frac{1}{T}\mathbf{Div} \vec{q} - \frac{1}{T^2}\vec{q} \bullet \vec{\nabla}T$, compte tenu du premier principe il s'écrit finalement sous la forme de l'inégalité de Clausius-Duhem traduisant le fait que l'incrément de dissipation volumique $d\Psi$ est non négatif :

$$\delta\Psi = \delta\Psi_1 + \delta\Psi_2 = \mathbf{Tr}(\bar{\sigma} \bullet \delta\bar{\varepsilon}) - (\delta\mathcal{F} + \mathcal{S}\delta T) - \frac{1}{T}\delta\vec{q} \bullet \vec{\nabla}T \geq 0 \quad (3.7)$$

- $\delta\Psi_1 = \mathbf{Tr}(\bar{\sigma} \bullet \delta\bar{\varepsilon}) - (\delta\mathcal{F} + \mathcal{S}\delta T)$ est l'incrément de dissipation volumique *intrinsèque*.
- $\delta\Psi_2 = \frac{1}{T}\delta\vec{q} \bullet \vec{\nabla}T$ est l'incrément de dissipation volumique *thermique*.

La réversibilité *thermodynamique* implique $d\Psi_1 + d\Psi_2 = 0$.

- La réversibilité *thermique* $d\Psi_2 = 0$ est assurée en particulier en conditions adiabatiques ($\vec{q} = 0$) et isothermes ($\vec{\nabla}T = 0$) généralement rencontrées en mécanique.
- La réversibilité *mécanique* $d\Psi_1 = 0$ définit l'élasticité *parfaite*, comportement d'un milieu capable de stocker sans pertes l'énergie fournie par les forces extérieures en se déformant et de la restituer en totalité de lors du déchargement.

La réversibilité mécanique $d\psi_1 = 0$ *élasticité parfaite* implique $d\mathcal{F} = -\mathcal{S}dT + Tr(\bar{\sigma}d\bar{\varepsilon})$ conduisant aux relations :

$$d\mathcal{E} = Td\mathcal{S} + \mathbf{Tr}(\bar{\sigma}d\bar{\varepsilon}) \quad d\mathcal{F} = -\mathcal{S}dT + \mathbf{Tr}(\bar{\sigma}d\bar{\varepsilon}) \quad d\Phi = -\mathcal{S}dT + \mathbf{Tr}(\bar{\varepsilon}d\bar{\sigma}) \quad (3.8)$$

$$\bar{\sigma} = \frac{\partial\mathcal{E}}{\partial\bar{\varepsilon}} \Big|_S = \frac{\partial\pi}{\partial\bar{\varepsilon}} \quad \bar{\sigma} = \frac{\partial\mathcal{F}}{\partial\bar{\varepsilon}} \Big|_T = \frac{\partial\pi}{\partial\bar{\varepsilon}} \quad \bar{\varepsilon} = -\frac{\partial\Phi}{\partial\bar{\sigma}} \Big|_T = \frac{\partial\omega}{\partial\bar{\sigma}} \quad (3.9)$$

$\Phi = \mathcal{F} - \text{Tr}(\bar{\sigma}\bar{\varepsilon})$ étant le potentiel thermodynamique. Ces formules sont la généralisation des formules de la thermodynamique des gaz où $\text{Tr}(\bar{\sigma}\bar{\varepsilon}) = -pV$.

En mécanique, dans la grande majorité des cas, les vitesses de déformations sont suffisamment lentes pour assurer l'équilibre thermique en conditions isothermes de sorte que $dT = 0$. En prenant comme état de référence thermodynamique $\mathcal{F} = \Phi = 0$ le corps non déformé $\bar{\varepsilon} = 0$ à température $T = \text{Cte}$ pour s'affranchir des déformations de dilatation thermique le *potentiel élastique* π s'identifie alors à l'*énergie libre* \mathcal{F} et le *potentiel élastique complémentaire* ω s'identifie à l'opposé du *potentiel thermodynamique* Φ .

3.2 L'élasticité

3.2.1 Les deux élasticités

Les matériaux présentent en deçà d'un certain seuil de chargement qui leur est propre un comportement élastique quasi réversible caractérisé par une densité *volumique* de potentiel élastique $\pi(\bar{\varepsilon})$ qui s'identifie en régime *isotherme* $T = T_0$ à leur densité *volumique* d'énergie libre $\mathcal{F}(\bar{\varepsilon})$. A l'incrément de déformation $d\bar{\varepsilon}$ correspond l'état de contrainte tel que :

$$\bar{\sigma} = \frac{\partial \pi}{\partial \bar{\varepsilon}} = \left. \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \bar{\varepsilon}} \right|_T = \left. \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \bar{\varepsilon}} \right|_T - T_0 \left. \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \bar{\varepsilon}} \right|_T$$

Cette expression montre que l'origine de l'élasticité est double : une contribution provient de la variation d'énergie interne associée à la déformation, l'autre provient de celle de l'entropie. Selon les classes de matériaux ces deux contributions peuvent être d'ordres de grandeur très différents.

- Pour les matériaux très déformables comme les *élastomères*, les conformations des chaînes macromoléculaires peuvent être considérablement modifiées par les déformations quasiment sans variation des distances interatomiques et le terme *entropique*, responsable de la *haute élasticité caoutchoutique*, devient prépondérant. Les déformations résultantes sont importantes et le *comportement élastique* est *non linéaire* du fait de l'évolution de résistance au changement de conformation des macromolécules, désenchevêtrement, étirement, alignement. La contrainte augmente bien avec la déformation puisque l'entropie diminue, la structure interne du matériau pelotes initialement désordonnée s'ordonnant par étirement des chaînes macromoléculaires.
- La variation d'*énergie interne* est prépondérante pour les matériaux *cristallins* pour lesquels de légères variations des distances interatomiques associées à la déformation entraînent des variations considérables de l'*énergie de cohésion* alors que l'entropie n'est quasiment pas modifiée. Ce type de comportement *élastique linéaire* commun à la plupart des structures s'étudie généralement dans le cadre des *petites déformations* en élasticité *linéaire* objet des développements de ce chapitre.

3.2.2 L'élasticité linéaire

En deçà de leur seuil d'écoulement plastique (matériaux *ductiles*) ou de rupture (matériaux *fragiles*) les matériaux *cristallins* présentent une réponse *élastique linéaire*. Elle se traduit donc par une relation de proportionnalité entre les tenseurs $\bar{\sigma}$ et $\bar{\varepsilon}$. Dans ce cas les potentiels $\pi(\bar{\varepsilon}) = \mathcal{F}(\bar{\varepsilon})$ et $\omega(\bar{\sigma}) = -\Phi(\bar{\sigma})$ sont égaux (Cf. Fig. 3.3) et la densité volumique d'énergie élastique stockée s'exprime sous la forme :

$$\pi(\bar{\varepsilon}) = \mathcal{F} = \frac{1}{2} \frac{dW}{dV} = \frac{1}{2} \text{Tr}(\bar{\sigma}\bar{\varepsilon}) \quad (3.10)$$

\mathcal{F} se réduit à une fonction homogène de degré 2 des composantes de $\bar{\varepsilon}$ mais aussi de $\bar{\sigma}$. C'est une forme quadratique définie positive ; Le théorème d'Euler sur les fonctions homogènes conduit à la relation :

$$\mathcal{F} = \frac{1}{2} \text{Tr}(\bar{\sigma}\bar{\varepsilon}) = \frac{1}{2} \text{Tr}(\bar{\varepsilon} \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \bar{\varepsilon}}) \Big|_T = \frac{1}{2} \text{Tr}(\bar{\sigma} \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \bar{\sigma}}) \Big|_T \quad (3.11)$$

L'énergie libre \mathcal{F} permet, en *élasticité linéaire* seulement, de déduire les déformations par $\bar{\varepsilon} = \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \bar{\sigma}} \Big|_T$.

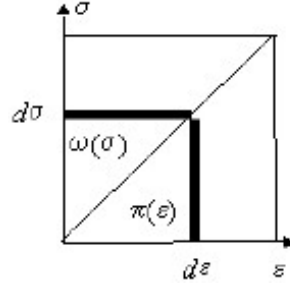


FIG. 3.3 – Potentiels d'élasticité linéaire

3.2.3 L'élasticité linéaire isotrope

La plupart des matériaux sont élaborés sous forme polycristalline. Comme en mécanique des milieux continus on ne s'intéresse qu'à des particules de matière dont les dimensions sont grandes devant celles des microcristaux, l'isotropie macroscopique du matériau résulte généralement d'une moyenne des propriétés anisotropes des nombreux microcristaux constituant la particule et les propriétés mécaniques élastiques ne dépendent pas de l'orientation au sein de la matière, contrairement au cas des monocristaux ou des composites.

Soumis à un champ de contrainte suffisamment faible pour que ces matériaux restent en deçà de leur seuil de plasticité, les coefficients de la relation contrainte - déformation en régime *élastique linéaire*, les modules élastiques de ces matériaux, sont des constantes indépendantes de l'amplitude de la contrainte appliquée.

L'énergie libre \mathcal{F} d'un matériau *isotrope*, étant une fonction homogène de degré 2 des composantes de $\bar{\varepsilon}$ ou de $\bar{\sigma}$, est un *scalaire* invariant par changement de repère. \mathcal{F} ne peut donc dépendre que des invariants *quadratiques* $\{\text{Tr}^2(\bar{\varepsilon}), \text{Tr}(\bar{\varepsilon}^2)\}$ ou $\{\text{Tr}^2(\bar{\sigma}), \text{Tr}(\bar{\sigma}^2)\}$:

$$m_1^\varepsilon \text{Tr}^2(\bar{\varepsilon}) + m_2^\varepsilon \text{Tr}(\bar{\varepsilon}^2) = \mathcal{F} = m_1^\sigma \text{Tr}^2(\bar{\sigma}) + m_2^\sigma \text{Tr}(\bar{\sigma}^2) \quad (3.12)$$

$\{m_1^\varepsilon, m_2^\varepsilon\}$ et $\{m_1^\sigma, m_2^\sigma\}$ constituants des couples de deux *modules indépendants* caractérisant le comportement *élastique linéaire isotrope*. Ces couples ne sont pas indépendants et il est possible d'exprimer les modules d'un couple en fonction de ceux de l'autre. De même, par combinaison, il est possible de définir d'autres couples de modules.

Les matériaux **isotropes** sont caractérisés par **2 modules élastiques indépendants**.

3.3 Les modules élastiques

3.3.1 Module d'Young et coefficient de Poisson

Vers 1800 Young, médecin de formation, s'intéresse à l'élasticité de la cornée. En procédant à des essais de traction uniaxiale, il constate que la déformation ε_{\parallel} mesurée selon l'axe de traction est proportionnelle à la contrainte σ appliquée. Il définit le coefficient de proportionnalité $E = \frac{\sigma}{\varepsilon_{\parallel}}$.

Poisson complète l'analyse en constatant que l'allongement dans la direction de l'axe de traction s'accompagne d'un raccourcissement plus faible proportionnel dans les directions perpendiculaires. Il définit *positif* le coefficient de proportionnalité $\eta = -\frac{\varepsilon_{\perp}}{\varepsilon_{\parallel}}$.

- Le Module d'Young E a la dimension d'une contrainte et se mesure généralement en GPa (*cf.* annexe A.4). Il représente la contrainte qu'il faudrait appliquer pour obtenir une déformation unité soit doubler la longueur initiale. Aucun matériau ne répond linéairement à une telle contrainte, la plupart ont cédé bien avant.
- Le Coefficient de Poisson η est un nombre sans dimension compris dans l'intervalle $\{0, \frac{1}{2}\}$. A l'exception des élastomères comme le caoutchouc dont le coefficient de Poisson $\eta \simeq \frac{1}{2}$, la plupart des matériaux isotropes continus ont un coefficient de Poisson compris dans l'intervalle $\{0, 25 - 0,35\}$.

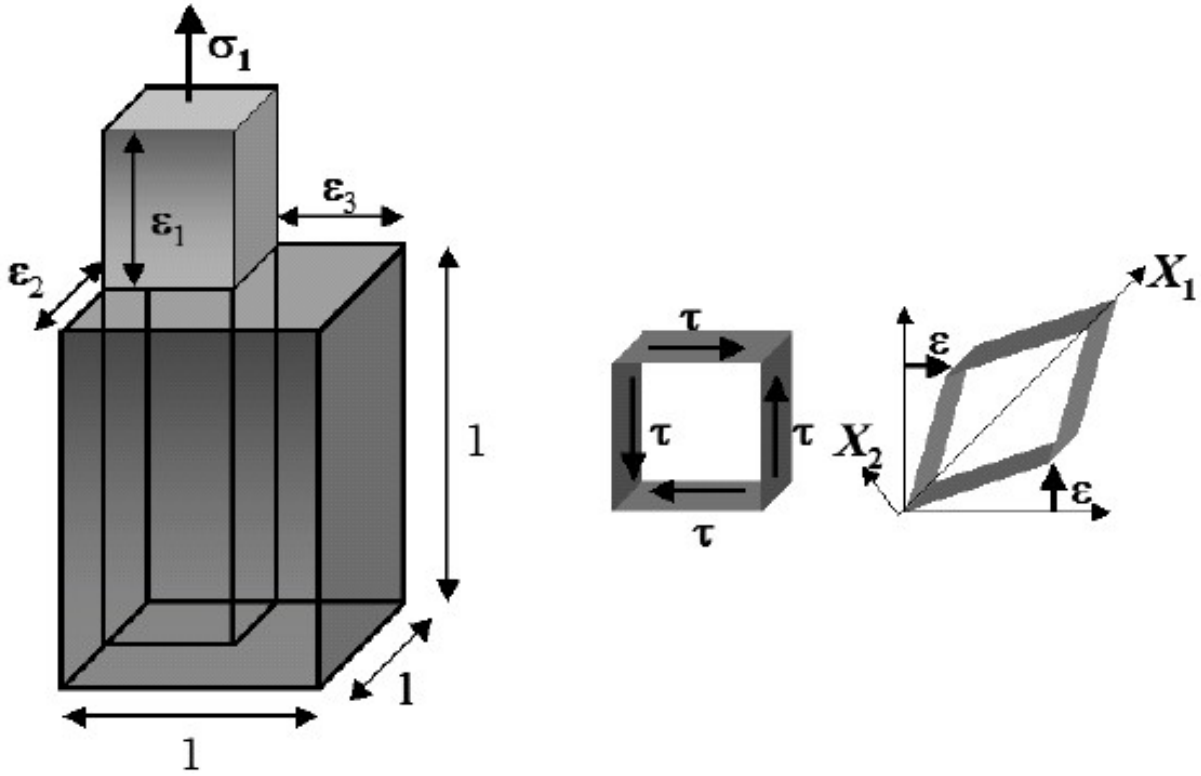


FIG. 3.4 – Modules : Young, Poisson, Coulomb

- Les matériaux structurellement complexes peuvent avoir des coefficient de Poisson supérieurs à 0,5. C'est le cas des granulaires, des poreux, des textiles et de nombreux tissus biologiques comme les muscles qui gonflent fortement lorsqu'on les contracte avec un coefficient de Poisson $\eta \simeq 1$. A l'opposé le coefficient de Poisson du liège $\eta \simeq 0$. Un bouchon ne s'allonge pas quand on l'étreint dans un bouche bouteille.

3.3.2 Module de Coulomb

Coulomb procède à des essais de torsion (cisaillement pur) et constate que le glissement γ est proportionnel au cisaillement τ appliqué. Il définit le coefficient de proportionnalité $G = \frac{\tau}{\gamma}$. Le module de Coulomb G a la dimension d'une contrainte et se mesure généralement en GPa. Il représente le cisaillement qu'il faudrait appliquer pour obtenir un glissement d'un radian.

3.3.3 Modules de Lamé

Lamé, qui s'intéressait à la propagation des ondes, introduit le couple de modules $\{\lambda, \mu\}$ tels que l'énergie libre (cf. Eq. 3.12), exprimée en termes d'invariants du tenseur des déformation s'écrive $\mathcal{F} = \frac{\lambda}{2} \text{Tr}^2(\bar{\epsilon}) + \mu \text{Tr}(\bar{\epsilon}^2)$. Les modules de lamé λ et μ ayant tous deux la dimension d'une contrainte.

3.3.4 Modules de compressibilité et de cisaillement

La déformation se décomposant en un *changement de volume à forme constante* et un *changement de forme à volume constant* (cf. 2.4.5) ces deux opérations seront caractérisées respectivement par les modules K et μ .

- Le changement de volume à forme constante est une déformation isotrope. Le module K établit la relation $\sigma_m = K\theta = 3K\epsilon_m$ entre la contrainte moyenne σ_m et la variation relative de volume résultante $\theta = \frac{dV}{V} = 3\epsilon_m$.

Dans le cas d'une *compression hydrostatique* dp à laquelle est associée la valeur moyenne $\sigma_m = -dp$, la relation $\sigma_m = K\theta$ s'écrit $K = -V \frac{dp}{dV}$. Le *module de compressibilité* K , dont la dimension

est celle d'une contrainte, n'est autre que l'inverse du coefficient de compressibilité thermodynamique $\chi = -\frac{1}{V} \frac{dV}{dp}$.

- Le changement de forme à volume constant est une déformation qui ne fait intervenir que les déviateurs des contraintes et des déformations caractérisés par les contrainte σ_d et déformation ε_d déviatoriques moyennes. Le *module de cisaillement* μ , dont la dimension est celle d'une contrainte, établit la relation $\sigma_d = 2\mu\varepsilon_d$ entre ces deux grandeurs.

3.4 Les équations de l'élasticité

3.4.1 La loi de Hooke

Relation de Young

A partir de la définition de E et de η la relation contrainte déformation s'écrit :

$$\bar{\sigma} = \begin{vmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \implies \bar{\varepsilon} = \begin{vmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{vmatrix} = \frac{\sigma_1}{E} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\eta & 0 \\ 0 & 0 & -\eta \end{vmatrix}$$

Tout état de contrainte se réduisant à un état triaxial dans ses axes principaux, le principe de superposition permet de le décomposer $\bar{\sigma}$ en trois états de contraintes uniaxiaux orthogonaux, de calculer pour chacun la déformation résultante puis de sommer ces trois déformations pour obtenir le tenseur des déformations $\bar{\varepsilon}$ associé à $\bar{\sigma}$. Cette relation *tensorielle*, établie dans le repère principal, est *intrinsèque*. Elle s'écrit dans un repère quelconque sous la forme de l'équation de Young :

$$E\bar{\varepsilon} = -\eta\mathbf{Tr}(\bar{\sigma})\bar{\delta} + (1 + \eta)\bar{\sigma} \quad E\varepsilon_{ij} = -\eta\sigma_{kk}\delta_{ij} + (1 + \eta)\sigma_{ij} \quad (3.13)$$

Relation de Lamé

La relation contrainte - déformation résultant de la relation $\bar{\sigma} = \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \bar{\varepsilon}} \Big|_T$, avec $\mathcal{F} = \frac{\lambda}{2} \mathbf{Tr}^2(\bar{\varepsilon}) + \mu \mathbf{Tr}(\bar{\varepsilon}^2)$, s'écrit alors :

$$\sigma = \lambda \mathbf{Tr}(\bar{\varepsilon})\bar{\delta} + 2\mu\bar{\varepsilon} \quad \sigma_{ij} = \lambda\varepsilon_{kk}\delta_{ij} + 2\mu\varepsilon_{ij} \quad (3.14)$$

Relation de Hooke

En décomposant $\bar{\sigma} = \bar{S}_\sigma + \bar{D}_\sigma = \sigma_m\bar{\delta} + \sigma_d\bar{\pi}_\sigma$ et $\bar{\varepsilon} = \bar{S}_\varepsilon + \bar{D}_\varepsilon = \varepsilon_m\bar{\delta} + \varepsilon_d\bar{\pi}_\varepsilon$ en parties sphériques et déviatoriques, le comportement élastique d'un milieu isotrope est entièrement caractérisé par la loi de Hooke :

$$\bar{S}_\sigma = 3K\bar{S}_\varepsilon \quad \bar{D}_\sigma = 2\mu\bar{D}_\varepsilon \quad \bar{\pi}_\sigma = \bar{\pi}_\varepsilon \quad (3.15)$$

Le tenseur des contraintes $\bar{\sigma}$ et celui des déformations $\bar{\varepsilon}$ admettent les *mêmes directions principales en tout point*. Ils ont même tenseur des directions $\bar{\pi}$.

Relations entre les modules

Ayant défini 3 couples de modules $\{E, \eta\}$, $\{\lambda, \mu\}$ et $\{K, \mu\}$ ainsi que le module G , établissons les relations qui lient ces modules entre-eux.

1. Module de cisaillement.

En ne considérant dans l'équation (3.13) que les composantes de cisaillement σ_{ij} avec $i \neq j$ on obtient la relation $\gamma_{ij} = 2\varepsilon_{ij} = \frac{2(1+\eta)}{E}$ qui s'identifie à la définition $\sigma_{ij} = G\gamma_{ij}$ du module de Coulomb G conduisant à la relation $G = \frac{E}{2(1+\eta)}$.

En ne considérant dans l'équation (3.14) que les composantes de cisaillement σ_{ij} avec $i \neq j$ on obtient la relation $\sigma_{ij} = 2\mu\varepsilon_{ij} = \mu\gamma_{ij}$ qui, comparée à $\sigma_{ij} = G\gamma_{ij}$, conduit à la relation $G \equiv \mu$. Le module de Coulomb G s'identifie au module de cisaillement μ .

Le module de cisaillement μ , qui lie également les déviateurs de $\bar{\sigma}$ et de $\bar{\varepsilon}$ (cf. Eq. 3.15), quantifie la résistance au changement de forme (à volume constant) des matériaux.

2. Relations entre $\{E, \eta\}$, $\{\lambda, \mu\}$ et $\{K, \mu\}$

Pour établir ces relations, il faut résoudre le système linéaire de six équations algébriques constituant les égalités tensorielles (3.13) ou (3.14). Pour ce faire, prenons la trace de la relation d'Young (3.13) et celle de la relation de Lamé (3.14). Compte tenu de $\text{Tr}(\bar{\bar{\delta}}) = 3$, elle conduisent aux relations :

$$E \text{Tr}(\bar{\bar{\varepsilon}}) = (1 - 2\eta) \text{Tr}(\bar{\bar{\sigma}}) \quad \text{Tr}(\bar{\bar{\sigma}}) = (3\lambda + 2\mu) \text{Tr}(\bar{\bar{\varepsilon}}) \quad (3.16)$$

entre les traces de $\bar{\bar{\sigma}}$ et de $\bar{\bar{\varepsilon}}$. De la relation de Hooke (3.15) on tire les relations :

$$K = \frac{E}{3(1 - 2\eta)} = \lambda + \frac{2}{3}\mu \quad (3.17)$$

En remplaçant dans la relation d'Young (3.13) $\text{Tr}(\bar{\bar{\sigma}})$ par son expression en fonction de $\text{Tr}(\bar{\bar{\varepsilon}})$ tirée de la relation (3.16) puis en résolvant en terme de $\bar{\bar{\sigma}}$, cette équation s'écrit :

$$\bar{\bar{\sigma}} = \frac{\eta E}{(1 + \eta)(1 - 2\eta)} \text{Tr}(\bar{\bar{\varepsilon}}) \bar{\bar{\delta}} + \frac{E}{1 + \eta} \bar{\bar{\varepsilon}}$$

Par identification avec la relation de Lamé (3.14) on obtient les relations cherchées :

$$\lambda = \frac{\eta E}{(1 + \eta)(1 - 2\eta)} \quad \mu = \frac{E}{2(1 + \eta)} \quad (3.18)$$

En remplaçant dans la relation de Lamé (3.14) $\text{Tr}(\bar{\bar{\varepsilon}})$ par son expression en fonction de $\text{Tr}(\bar{\bar{\sigma}})$ tirée de la relation (3.16) puis en résolvant en terme de $\bar{\bar{\varepsilon}}$, cette équation s'écrit :

$$\bar{\bar{\varepsilon}} = -\frac{\lambda}{2\mu(3\lambda + 2\mu)} \text{Tr}(\bar{\bar{\sigma}}) \bar{\bar{\delta}} + \frac{1}{2\mu} \bar{\bar{\sigma}}$$

Par identification avec la relation d'Young (3.13) on obtient les relations cherchées :

$$E = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu} \quad \eta = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)} \quad (3.19)$$

3.4.2 Les modules effectifs

Les états de contrainte σ et de déformation ε étant décrits dans le repère principal :

$$\bar{\bar{\sigma}} = \begin{vmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{vmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \bar{\bar{\varepsilon}} = \begin{vmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{vmatrix}$$

définissons les modules effectifs $\{E^*, \eta^*\}$ par les relations : $E^* = \frac{\sigma_1}{\varepsilon_1}$ et $\eta^* = -\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}$.

1. Déformation libre

La relation de Young (3.13) est directement applicable et la définition des modules effectifs $\{E^*, \eta^*\}$ coïncide avec celle des modules $\{E, \eta\}$

2. Déformation interdite selon l'axe x_3

Dans ce cas $\varepsilon_3 = 0$ et la composante de contrainte σ_3 est liée aux contraintes σ_1 et σ_2 par la relation : $\sigma_3 = \eta(\sigma_1 + \sigma_2)$. La relation d'Young est applicable aux sous états plans :

$$\bar{\bar{\sigma}} = \begin{vmatrix} \sigma_1 & 0 \\ 0 & \sigma_2 \end{vmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \bar{\bar{\varepsilon}} = \begin{vmatrix} \varepsilon_1 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 \end{vmatrix}$$

à condition de remplacer les modules vrais du matériaux par les modules effectifs :

$$E^* = \frac{E}{1 - \eta^2} \quad \eta^* = \frac{\eta}{1 - \eta} \quad (3.20)$$

3. Déformation interdite selon les axes x_2 et x_3

Dans ce cas $\varepsilon_2 = \varepsilon_3 = 0$, $\sigma_2 = \sigma_3 = \frac{\eta}{1-\eta}\sigma_1$, le coefficient de Poisson effectif $\eta^* = 0$. Le problème devient unidimensionnel en déformation et le module d'Young effectif vaut :

$$E^* = \frac{E(1-\eta)}{(1-2\eta)(1+\eta)} = \lambda + 2\mu \quad (3.21)$$

Lorsque la déformation est interdite latéralement, $E^* > E$, le matériau paraît plus rigide du fait de la frustration de l'effet Poisson.

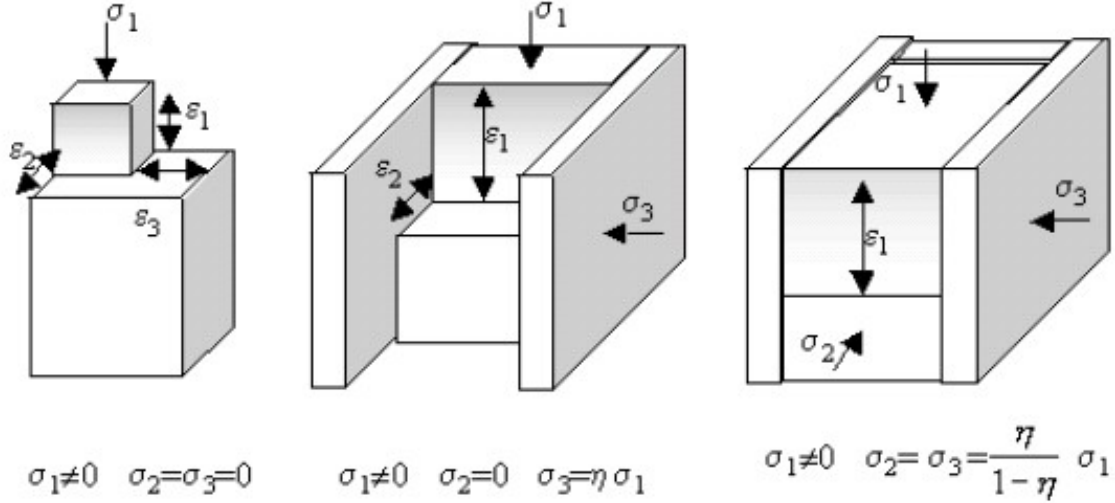


FIG. 3.5 – Modules effectifs : Compression uniaxiale

3.4.3 L'équation de Lamé

En combinant l'équation de l'équilibre dynamique (cf. Eq. 2.18) vérifiée par le tenseur des contraintes $\bar{\sigma}$, la définition du tenseur de déformation $\bar{\varepsilon}$ en terme de déplacement \vec{u} (cf. Eq. 2.24), la définition de l'accélération $\gamma = \frac{d^2 \vec{u}}{dt^2}$ et l'équation d'état du matériau (cf. Eq. 3.14), on obtient, par élimination de $\bar{\sigma}$ et de $\bar{\varepsilon}$ entre ces 3 équations, l'équation de Lamé de l'élasticité linéaire isotrope en terme de champ de déplacement :

$$\begin{aligned}
 (\lambda + \mu) \mathbf{Grad}(\mathbf{Div} \vec{u}) + \mu \Delta \vec{u} + \rho \vec{X} &= \rho \frac{d^2 \vec{u}}{dt^2} \\
 (\lambda + \mu) \mathbf{Rot}(\mathbf{Rot} \vec{u}) + (\lambda + 2\mu) \Delta \vec{u} + \rho \vec{X} &= \rho \frac{d^2 \vec{u}}{dt^2} \\
 \frac{1}{1-2\eta} \mathbf{Grad}(\mathbf{Div} \vec{u}) + \Delta \vec{u} + \frac{\rho}{\mu} \vec{X} &= \frac{\rho}{\mu} \frac{d^2 \vec{u}}{dt^2}
 \end{aligned} \quad (3.22)$$

Elle diffère de l'équation de Laplace par le terme $\mathbf{Grad}(\mathbf{Div} \vec{u})$ qui en fait toute sa richesse, mais aussi toute sa complexité. Elle est aux matériaux élastiques linéaires isotropes ce qu'est l'équation de Navier-Stokes aux fluides newtoniens.

Forces de volume constantes ou nulles

Dans la plupart des cas la déformation d'une structure résulte de l'action des efforts appliqués à sa surface (chargement externe n'intervenant dans la solution élastique que par l'intermédiaire des conditions aux limites) et de celle du poids propre de la structure (efforts dus à la pesanteur correspondant à une densité volumique de force constante).

Lorsque les forces de volume \vec{f} sont constantes l'équation de Lamé se réduit à :

$$\frac{1}{1-2\eta} \mathbf{Grad}(\mathbf{Div} \vec{u}) + \Delta \vec{u} + \frac{\rho}{\mu} \vec{f} = \vec{0}$$

Sa divergence - qui détermine la variation de volume au cours de la déformation - est une fonction harmonique. De la relation linéaire entre $\bar{\sigma}$ et $\bar{\varepsilon}$ il résulte que la trace du tenseur des contraintes est également une fonction harmonique :

$$\Delta(\mathbf{Div} \vec{u}) = \Delta(\mathbf{Tr}(\bar{\varepsilon})) = 0 \quad \Delta(\mathbf{Tr}(\bar{\sigma})) = 0 \quad (3.23)$$

3.5 Les problèmes plans

Dans le cas des structures en feuillets minces ou des structures de grande longueur chargées uniquement dans le plan de section droite, il est possible de réduire l'étude à celle d'un problème mécanique bidimensionnel plan.

Au sens mathématique, un problème est bidimensionnel lorsque toutes les grandeurs ne sont fonction que de deux des trois coordonnées d'espace. Cette seule restriction ne simplifie pas les problèmes d'élasticité car si le champ de déplacement \vec{u} ne dépend que de x_1, x_2 la déformation $\varepsilon_{33} = \frac{\partial u_3}{\partial x_3}$ et les gradients $\frac{\partial u_1}{\partial x_3}, \frac{\partial u_2}{\partial x_3}$ sont nuls mais $\frac{\partial u_3}{\partial x_1}$ et $\frac{\partial u_3}{\partial x_2}$ donc ε_{31} et ε_{32} ne le sont en général pas. Le tenseur des déformations $\bar{\varepsilon}$ possède encore 5 composantes non nulles au lieu de 6 et le tenseur des contraintes $\bar{\sigma}$ 6 composantes non nulles.

Afin de simplifier le problème élastique, on impose comme condition supplémentaire que l'axe x_3 soit direction principale en tout point ce qui implique que le chargement de la structure, invariant par translation selon x_3 , s'effectue dans le plan de section droite $\{x_1, x_2\}$. Il faut alors distinguer le cas des *déformations planes* de celui des *contraintes planes*.

3.5.1 La déformation plane

En déformation plane l'axe x_3 est *en tout point* direction principale à valeur propre nulle du tenseur des déformations $\bar{\varepsilon}$ impliquant $\varepsilon_{33} = 0$, $\varepsilon_{13} = \frac{1}{2} \frac{\partial u_3}{\partial x_1} = 0$ et $\varepsilon_{23} = \frac{1}{2} \frac{\partial u_3}{\partial x_2} = 0$ d'où $u_3 = 0$

L'axe x_3 est également direction principale du tenseur des contraintes $\bar{\sigma}$ impliquant $\sigma_{13} = \sigma_{23} = 0$, mais, la déformation ε_{33} étant nulle, en déformation plane les sections adjacentes ne sont pas libres de se déformer par effet Poisson selon x_3 , elles se gênent mutuellement et cette frustration est à l'origine d'une contrainte $\sigma_{33} \neq 0$. Sa valeur $\sigma_{33} = \eta(\sigma_{11} + \sigma_{22})$ se déduit directement de la loi de comportement élastique $\varepsilon_{33} = \frac{1}{E}(\sigma_{33} - \eta(\sigma_{11} + \sigma_{22}))$ (cf. relation d'Young Eq. 3.13).

La déformation plane concerne donc des structures de grande longueur invariantes en forme et en chargement par translation selon l'axe x_3 telles que des tunnels ou des feuillets minces insérés entre deux blocs suffisamment rigides pour être considérés comme indéformables.

Les tenseurs $\bar{\sigma}$, $\bar{\varepsilon}$ et le champ de déplacement \vec{u} satisfont alors aux relations d'un problème bidimensionnel :

$$\bar{\varepsilon} = \begin{vmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{12} & \varepsilon_{22} \end{vmatrix} \Rightarrow u = \begin{vmatrix} u_1(x_1, x_2) \\ u_2(x_1, x_2) \end{vmatrix} \Rightarrow \bar{\sigma} = \begin{vmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} \end{vmatrix} \quad \text{avec} \quad \begin{matrix} u_3 = 0 \\ \sigma_{33} = \eta(\sigma_{11} + \sigma_{22}) \end{matrix} \quad (3.24)$$

à condition de remplacer dans la relation de Young $E^* \bar{\varepsilon} = (1 + \eta^*) \bar{\sigma} - \eta^* \mathbf{Tr}(\bar{\sigma}) \bar{\delta}$ les modules vrais du matériaux par les modules effectifs (cf. Eq. 3.20) :

$$E^* = \frac{E}{1 - \eta^2} \quad \eta^* = \frac{\eta}{1 - \eta}$$

L'équation de l'équilibre élastique statique $\mathbf{Div}_D \bar{\sigma} + \rho \vec{X} = \vec{0}$ se réduit à :

$$\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} + \rho X_1 = 0 \quad \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + \rho X_2 = 0 \quad \rho X_3 = 0$$

la dernière équation impliquant que la force de volume $\rho \vec{X}$ ait une composante $X_3 = 0$ sur l'axe x_3 . Lorsque les forces de volume se réduisent au poids propre de la structure $\vec{X} = \vec{g}$ implique que l'axe x_3 soit horizontal.

Compte tenu de la relation $\sigma_{33} = \eta(\sigma_{11} + \sigma_{22})$ et de l'équation générale (3.23) la solution d'un problème de *déformation plane* passe par la résolution de :

$$\Delta(\sigma_{11} + \sigma_{22}) = 0 \quad (3.25)$$

Fonction de contrainte

Lorsque l'on néglige les forces de volumes l'équation de l'équilibre *élastique statique* se réduit à :

$$\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} = 0 \quad \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} = 0$$

Les composantes σ_{11}, σ_{22} et σ_{12} se déduisent alors d'une *fonction de contrainte* arbitraire $\chi(x_1, x_2)$ par les relations :

$$\sigma_{11} = \frac{\partial^2 \chi}{\partial x_2^2} \quad \sigma_{22} = \frac{\partial^2 \chi}{\partial x_1^2} \quad \sigma_{12} = -\frac{\partial^2 \chi}{\partial x_1 \partial x_2} \quad (3.26)$$

Mais les 3 composantes σ_{11}, σ_{22} et σ_{12} ne sont pas indépendantes puisqu'elles s'expriment au moyen des deux seules composantes u_1, u_2 du champ de déplacement. La relation de Young conduit alors à la relation $E^*(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}) = (1 - \eta^*)(\sigma_{11} + \sigma_{22}) = (1 - \eta^*)\Delta\chi$. Comme $\varepsilon_{33} = 0$ entraîne $\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} = \mathbf{Div} \vec{u}$ et comme $\mathbf{Div} \vec{u}$ vérifie l'équation (3.23) la fonction de contrainte est une fonction biharmonique :

$$\Delta(\Delta\chi) = 0 \quad \sigma_{33} = \eta\Delta\chi \quad (3.27)$$

3.5.2 La contrainte plane

Le problème de la contrainte plane

En contrainte plane l'axe x_3 est en tout point direction principale à valeur propre nulle du tenseur des contraintes $\bar{\sigma}$ impliquant $\sigma_{13} = \sigma_{23} = \sigma_{33} = 0$.

Le tenseur des déformations $\bar{\varepsilon}$ déduit de la loi de comportement élastique linéaire (*cf.* relation d'Young Eq. 3.13) comporte une composante $\varepsilon_{33} = \frac{\partial u_3}{\partial x_3} = -\frac{\eta}{E}(\sigma_{11} + \sigma_{22})$ fonction de x_1, x_2 . La composante u_3 du champ de déplacement est donc une fonction de x_1, x_2, x_3 linéaire en x_3 . En conséquence $\frac{\partial u_3}{\partial x_1} \neq 0$ et $\frac{\partial u_3}{\partial x_2} \neq 0$ impliquant $\varepsilon_{13} \neq 0, \varepsilon_{23} \neq 0$ et $\sigma_{13} \neq 0, \sigma_{23} \neq 0$.

Le seul problème réellement bidimensionnel de contrainte plane vraie doit donc satisfaire à $\varepsilon_{33} = 0$, c'est également un problème de déformation plane. Il correspond à $\sigma_{11} + \sigma_{22} = 0$. C'est le cisaillement pur.

La contrainte quasi plane

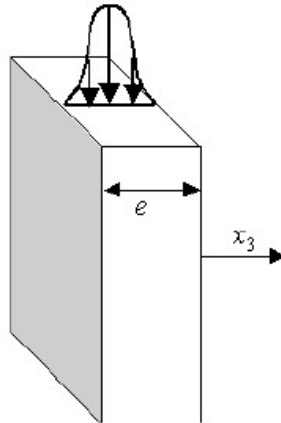


FIG. 3.6 – Feuille mince en contrainte quasi plane

Pour un *feuille mince* et vertical, sans force de volume autre que la gravité, sollicité dans son plan de section droite par un *chargement symétrique sur l'épaisseur*, condition nécessaire pour que le feuillet ne fléchisse pas hors de son plan, on pourra définir *rigoureusement* un problème de contrainte *moyenne* plane en définissant les composantes du tenseur des contraintes moyen par :

$$\langle \sigma_{ij} \rangle = \int_{-e/2}^{e/2} \sigma_{ij}(x_1, x_2, x_3) dx_3 \quad (3.28)$$

En effet, σ_{i1} et σ_{i2} étant des fonctions *paires* de x_3 par *symétrie du chargement*, il en est de même de $\frac{\partial \sigma_{i1}}{\partial x_1}$ et $\frac{\partial \sigma_{i2}}{\partial x_2}$ donc de $\frac{\partial \sigma_{i3}}{\partial x_3}$ puisque $\mathbf{Div}_D \bar{\sigma} = \bar{C} t \bar{e}$. En conséquence la primitive σ_{i3} est une fonction *impaire* de x_3 dont la valeur moyenne prise selon l'épaisseur e est *rigoureusement nulle*. Avec $\langle \varepsilon_{33} \rangle = -\frac{\eta}{E}(\langle \sigma_{11} \rangle + \langle \sigma_{22} \rangle)$ et à condition de raisonner sur les *valeurs moyennes selon l'épaisseur du feuillet*, le problème de contraintes quasi-planes s'écrit comme un vrai problème bidimensionnel :

$$\bar{\sigma} = \begin{vmatrix} \langle \sigma_{11} \rangle & \langle \sigma_{12} \rangle \\ \langle \sigma_{12} \rangle & \langle \sigma_{22} \rangle \end{vmatrix} \Rightarrow \bar{\bar{\varepsilon}} = \begin{vmatrix} \langle \varepsilon_{11} \rangle & \langle \varepsilon_{12} \rangle \\ \langle \varepsilon_{12} \rangle & \langle \varepsilon_{22} \rangle \end{vmatrix} \text{ avec } \begin{matrix} \langle \varepsilon_{13} \rangle = \langle \varepsilon_{23} \rangle = 0 \\ \langle \varepsilon_{33} \rangle = -\frac{\eta}{E}(\langle \sigma_{11} \rangle + \langle \sigma_{22} \rangle) \end{matrix} \quad (3.29)$$

la relation de Young conservant sa forme habituelle : $E \langle \bar{\bar{\varepsilon}} \rangle = (1 + \eta) \langle \bar{\sigma} \rangle - \eta \mathbf{Tr}(\langle \bar{\sigma} \rangle) \bar{\bar{\delta}}$. La déformation ε_{33} étant libre en contrainte plane les sections adjacentes sont libres de se déformer par effet Poisson selon x_3 , il n'y a pas de frustration donc E et η sont les vrais modules du matériau.

Compte tenu de la relation $\langle \sigma_{33} \rangle = 0$ et de l'équation générale (3.23) la solution d'un problème de *contrainte plane* passe par la résolution de :

$$\Delta(\langle \sigma_{11} \rangle + \langle \sigma_{22} \rangle) = 0 \quad (3.30)$$

3.5.3 Lieux caractéristiques des problèmes plans

Loi de similitude

Le fait que l'équation régissant les problèmes plans $\Delta(\langle \sigma_{11} \rangle + \langle \sigma_{22} \rangle) = 0$ en contraintes planes et $\Delta(\sigma_{11} + \sigma_{22}) = 0$ en déformation plane ne contienne aucun module élastique implique que, à géométrie et à chargement donné, la répartition des contraintes au sein d'une section droite du matériau est *indépendante* du matériau étudié. Cette propriété *remarquable* est à la base des méthodes d'analyse expérimentale des contraintes telles que la photoélasticimétrie qui utilise des modèles en matériau photoélastique transparent comme le verre, le PMMA (Polymétacrylate de méthyle) connu sous le nom commercial de Plexiglas ou diverses résines comme les araldites et polyuréthanes pour déterminer l'état plan de contraintes car il n'y a pas nécessité d'une mise à l'échelle des modules élastiques du matériau modèle et du matériau réel.

Le tenseur $\bar{\sigma}$ représentant l'état plan de contrainte étant caractérisé dans le système d'axe x_1, x_2 par ces trois composantes $\sigma_{11}, \sigma_{12}, \sigma_{22}$, en chaque point du modèle il admet un système d'axes propres dans lequel il se décompose en *sphérique* \bar{S} et *déviateur* \bar{D} sous la forme :

$$\bar{\sigma} = \begin{vmatrix} \sigma_I & 0 \\ 0 & \sigma_{II} \end{vmatrix} = \bar{S} + \bar{D} = \frac{1}{2}(\sigma_I + \sigma_{II}) \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + \frac{1}{2}(\sigma_I - \sigma_{II}) \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}$$

$\sigma_I + \sigma_{II}$ est représentatif du *sphérique* tandis que $\sigma_I - \sigma_{II}$ est représentatif du *déviateur* des contraintes.

Lieux caractéristiques

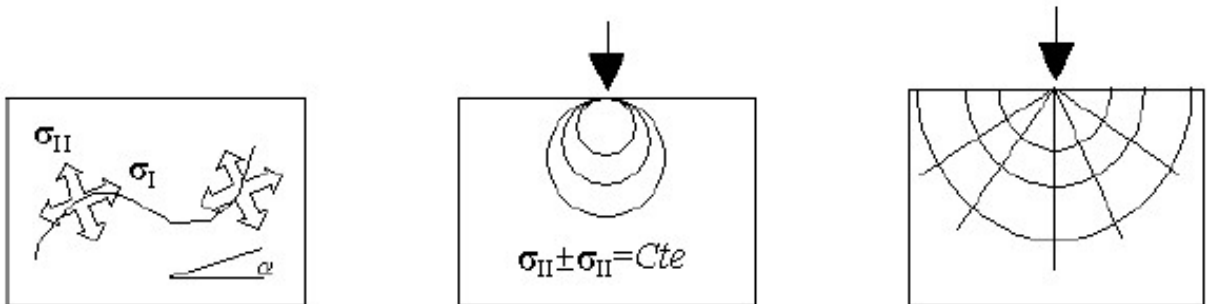


FIG. 3.7 – Isoclines - Isochromes - Isopaches - Isostatiques

Isoclines Une *isocline* - même inclinaison - est le lieu des points du modèle chargé où les directions des contraintes principales σ_I et σ_{II} font un angle α constant par rapport à la direction de référence x_1 . L'équation implicite du réseau des isoclines dans le repère x_1, x_2 est :

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\sigma_{12}(x_1, x_2)}{\sigma_{11}(x_1, x_2) - \sigma_{22}(x_1, x_2)}$$

Le réseau des isoclines est un réseau obtenu expérimentalement en photoélasticité.

Isochromes Une *isochrome* - même couleur - est le lieu des points du modèle chargé où la différence $\sigma_I - \sigma_{II}$ des contraintes principales est constante. Le réseau des isochromes matérialise les iso-valeurs du cisaillement maximal

$$\tau_{max} = \frac{1}{2}(\sigma_I - \sigma_{II}) = \sqrt{\left(\frac{\sigma_{11}(x_1, x_2) - \sigma_{22}(x_1, x_2)}{2}\right)^2 + \sigma_{12}^2(x_1, x_2)} = Cte$$

en tout point du modèle. Il est représentatif de l'état *déviatorique* et s'obtient expérimentalement en photoélasticité.

Isopaches Une *isopache* - même épaisseur - est le lieu des points du modèle chargé où la variation d'épaisseur $\delta e(x_1, x_2) = e_0 \varepsilon_{33}(x_1, x_2)$ est constante. Comme en contraintes planes $\varepsilon_{33} = -\frac{\nu}{E}(\sigma_{11} + \sigma_{22})$, c'est aussi le lieu des points du modèle où la somme $\sigma_I + \sigma_{II}$ des contraintes principales est constante. Le réseau des isopaches matérialise les iso-valeurs de l'épaisseur en tout point du modèle. Il est représentatif de l'état *sphérique* et s'obtient expérimentalement par interférométrie.

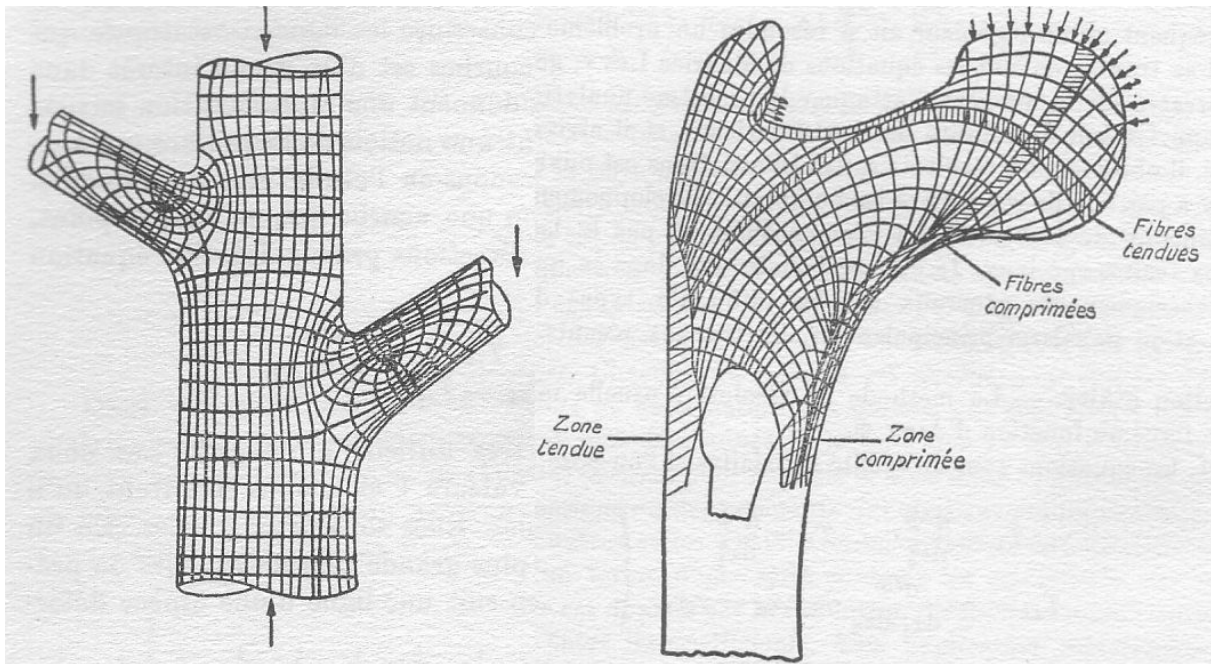


FIG. 3.8 – Isostatiques des neuds du bois et d'une tête de fémur

Isostatiques Les *isostatiques* sont les trajectoires des contraintes principales. Comme les lignes de courant en mécanique des fluides, elles représentent la manière dont les efforts s'écoulent à travers le modèle. Elles sont tangentes aux contraintes principales en tout point, formant un double réseau de lignes orthogonales. En particulier, un bord de modèle non chargé est une isostatique pour une des contraintes principales, les isostatiques de l'autre contrainte débouchant perpendiculairement sur ce bord libre de charge. L'équation différentielle implicite du réseau des isostatiques est donc :

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{dx_2}{dx_1} \quad \operatorname{tg} 2\theta = \frac{2\sigma_{12}(x_1, x_2)}{\sigma_{11}(x_1, x_2) - \sigma_{22}(x_1, x_2)} \quad \frac{dx_2}{dx_1} = (1 - \left(\frac{dx_2}{dx_1}\right)^2) \frac{\sigma_{12}(x_1, x_2)}{\sigma_{11}(x_1, x_2) - \sigma_{22}(x_1, x_2)}$$

Ce réseau très important car les isostatiques sont les *trajectoires potentielles des fissures*. Il ne s'obtient pas directement expérimentalement. Son tracé s'effectue à partir du relevé des *isoclines*, en traçant au sommet d'un quadrillage les croix correspondant à l'orientation des contraintes principales dont la direction est fournie par l'angle de l'isocline passant par ce point, puis en traçant les courbes enveloppes.

Dans les structures qui soutiennent la matière vivante la nature aligne les fibres résistantes le long de lignes de *ferraillage* qui matérialisent les isostatiques. La figure 3.8 présente les lignes isostatiques à l'encastrement des branches sur un tronc d'arbre et dans une tête de fémur, lignes que l'on retrouve très nettement dans la direction des fibres du bois à l'emplacement des noeuds et dans les fibres osseuses.

Tous ces réseaux respectent les symétries du modèle et de son chargement.

3.6 Ondes et vibrations

La propagation des ondes élastiques résulte de la compétition entre les forces *d'inertie* et les forces de *rappel élastique* correspondant à un échange oscillant entre l'*énergie cinétique* et l'*énergie élastique*. Un milieu isotrope possède deux modules élastiques caractérisant la *compressibilité* (changement de volume à forme constante) et la *résistance au cisaillement* (changement de forme à volume constant). Il peut propager en volume simultanément mais de manière découplée des ondes de *dilatation compression*, ondes *longitudinales* dont la polarisation \vec{u}_L (champ de déplacement de la matière induit par le passage de l'onde) est *parallèle* à la direction de propagation de l'onde et des ondes de *cisaillement* sans dilatation, ondes *transversales* dont la polarisation \vec{u}_T est *perpendiculaire* à la direction de propagation.

3.6.1 Les ondes de volume

Afin d'établir la forme générale de la célérité des ondes de volume dans les solides, considérons le modèle scalaire simple d'une onde de pulsation ω et de vecteur d'onde \vec{k} se propageant à la vitesse V dans la direction x au sein d'un milieu matériel de module E^* et de masse volumique ρ induisant sur son passage un déplacement local de la matière $u = u_0 \sin \omega(t - \frac{x}{V})$ (cf. fig. 3.9).

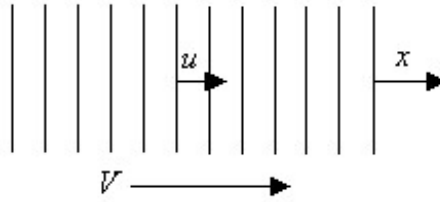


FIG. 3.9 – Propagation d'une onde

La densité volumique d'*énergie cinétique* $\frac{1}{2}\rho(\frac{\partial u}{\partial t})^2$ prend la valeur maximale $\frac{1}{2}\rho\omega^2 u_0^2$ tandis que la densité volumique d'*énergie élastique* $\frac{1}{2}\sigma\varepsilon$ prend, compte tenu du comportement élastique du milieu $\sigma = E^*\varepsilon = E^*\frac{\partial u}{\partial x}$, la valeur maximale $\frac{1}{2}E^*\omega^2(\frac{u_0}{V})^2$. L'égalité des valeurs maximales de ces deux formes d'énergie conduit à la forme générale de la vitesse du son :

$$V = \sqrt{\frac{E^*}{\rho}} \quad (3.31)$$

Les vitesses typiques de propagation du son dans les solides sont de l'ordre de quelques milliers de $m.s^{-1}$.

Dans un milieu élastique isotrope de dimensions caractéristiques D grandes devant la longueur d'onde λ , ($\lambda \ll D$), et en l'absence de forces de volumes $\vec{X} = 0$ l'équation de Lamé du mouvement

s'écrit (cf. eq. 3.22) :

$$(\lambda + \mu)\mathbf{Grad}(\mathbf{Div}\vec{u}) + \mu\Delta\vec{u} = \rho\frac{d^2\vec{u}}{dt^2} \quad (\lambda + \mu)\mathbf{Rot}(\mathbf{Rot}\vec{u}) + (\lambda + 2\mu)\Delta\vec{u} = \rho\frac{d^2\vec{u}}{dt^2} \quad (3.32)$$

Tout champ de vecteur \vec{u} est décomposable en la somme de 2 champs \vec{u}_L et \vec{u}_T tels que :

$$\vec{u} = \vec{u}_L + \vec{u}_T \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \mathbf{Div}\vec{u}_L \neq 0 & \mathbf{Rot}\vec{u}_L = 0 \\ \mathbf{Div}\vec{u}_T = 0 & \mathbf{Rot}\vec{u}_T \neq 0 \end{cases} \quad (3.33)$$

Les ondes longitudinales

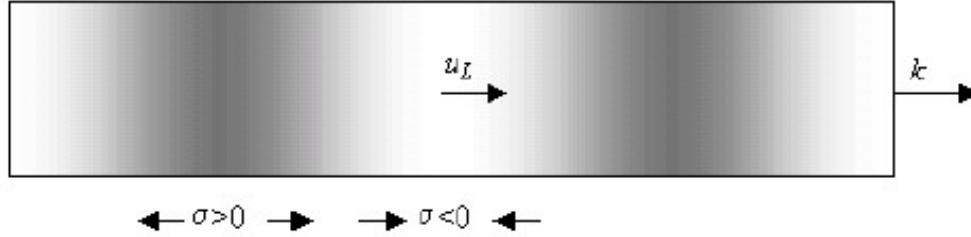


FIG. 3.10 – Propagation d'une onde longitudinale

Ce sont des ondes de *compression-traction* induisant un déplacement de la matière \vec{u}_L dans la direction de propagation définie par le vecteur d'onde \vec{k} (cf. fig. 3.10). La divergence du champ de déplacement \vec{u}_L n'est pas nulle, traduisant des variations locales de volume (*extension-contraction*) au passage de l'onde. Par contre le rotationnel du champ de déplacement \vec{u}_L est nul.

L'équation (3.32) se réduit alors à l'équation de propagation des ondes longitudinales :

$$(\lambda + 2\mu)\Delta\vec{u} = \rho\frac{d^2\vec{u}}{dt^2} \quad (3.34)$$

dont la vitesse de propagation est :

$$V_L = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}} = \sqrt{\frac{E^*}{\rho}} \quad \text{avec} \quad E^* = E \frac{1 - \eta}{(1 + \eta)(1 - 2\eta)} \quad (3.35)$$

Les ondes transversales

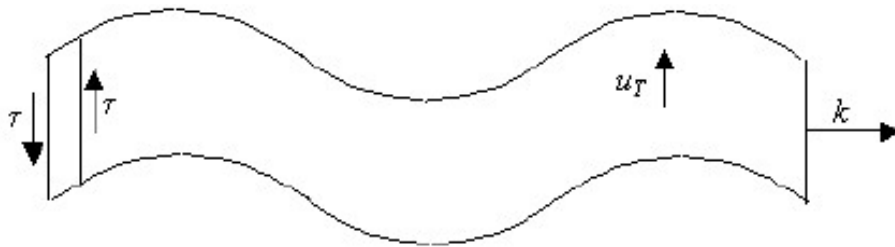


FIG. 3.11 – Propagation d'une onde transverse

Ce sont des ondes de *cisaillement* induisant un déplacement de la matière \vec{u}_T perpendiculaire à la direction de propagation définie par le vecteur d'onde \vec{k} (cf. fig. 3.11). La divergence du champ de déplacement \vec{u}_T est nulle, traduisant une absence de variation locale de volume au passage de l'onde. Par contre le rotationnel du champ de déplacement \vec{u}_T est non nul. L'équation (3.32) se réduit alors à l'équation de propagation des ondes transversales :

$$\mu\Delta\vec{u} = \rho\frac{d^2\vec{u}}{dt^2} \quad (3.36)$$

dont la vitesse de propagation est :

$$V_T = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} = \sqrt{\frac{E^*}{\rho}} \quad \text{avec} \quad E^* = \sqrt{\frac{E}{2(1+\eta)}} \quad (3.37)$$

Le rapport des vitesses longitudinale et transverse ne dépend que du coefficient de Poisson η :

$$\frac{V_T}{V_L} = \sqrt{\frac{1-2\eta}{2(1+\eta)}} < \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \frac{V_T}{V_L} = \frac{1}{2} \quad \text{pour} \quad \eta = \frac{1}{3} \quad (3.38)$$

3.6.2 Barres, plaques et blocs

Les expressions des vitesses de propagation des ondes longitudinales (eq. 3.35) et transverse (eq. 3.37) ont été obtenues dans l'hypothèse où les dimensions D du milieu sont grandes devant la longueur d'onde λ . Elles doivent être modifiées si les dimensions du milieu perpendiculaires à la direction de propagation deviennent comparables ou inférieures à la longueur d'onde λ .

Ondes longitudinales

Pour un milieu de dimensions caractéristiques $L \gg \lambda$ dans la direction de propagation et l, h dans les directions perpendiculaires, on distinguera (cf. fig. 3.12) les trois cas :

- Barres : $l, h \ll \lambda$
- Plaques : $h \ll \lambda$ et $l \gg \lambda$
- Blocs : $l, h \gg \lambda$

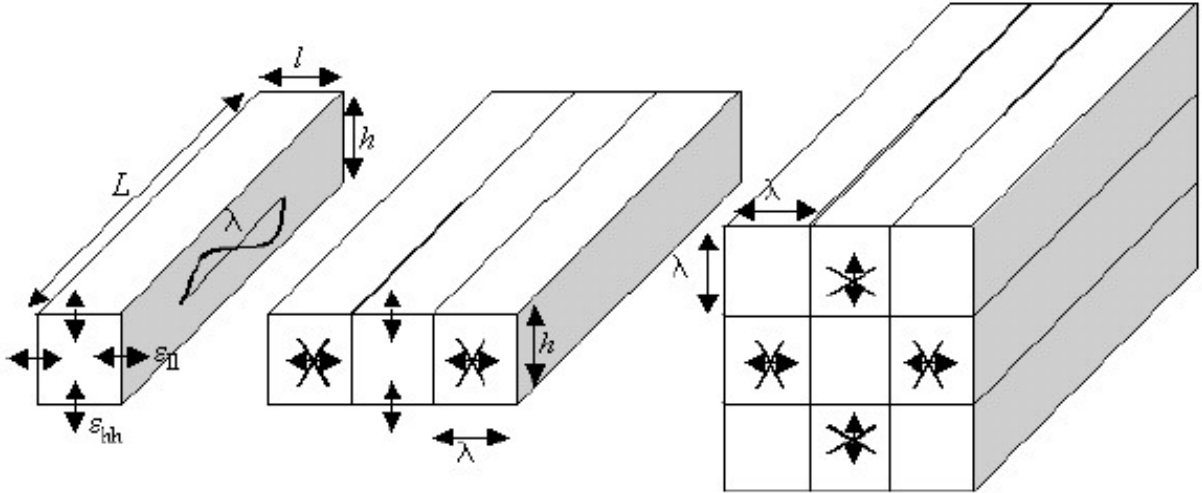


FIG. 3.12 – Barres, plaques et blocs

1. Barres

Comme $l, h \ll \lambda$, les déformations ε_{ll} et ε_{hh} induites par effet Poisson sont libres et le module équivalent à retenir dans l'expression de la vitesse de propagation est le module vrai $E^* = E$ du matériau (cf. section 3.4.2).

2. Plaques

En décomposant la plaque en une série de poutre de hauteur $h \ll \lambda$ et de largeur λ la déformation et ε_{hh} induite par effet Poisson reste libre mais la déformation ε_{ll} est nulle, les effets Poisson des poutres adjacentes dans la direction l se contrariant mutuellement. Le module équivalent à retenir dans l'expression de la vitesse de propagation est le module apparent $E^* = \frac{E}{1-\eta^2}$ du matériau.

3. Blocs

En décomposant le bloc en une série de poutre de hauteur et de largeur λ les déformations ε_{hh} et ε_{ll} sont nulles, les effets Poisson des poutres adjacentes dans les directions h et l se contrariant mutuellement. Le module équivalent à retenir dans l'expression de la vitesse de propagation est le module apparent $E^* = E \frac{1-\eta}{(1+\eta)(1-2\eta)}$ du matériau.

Les vitesses longitudinales de propagation correspondantes sont :

$$\begin{array}{lll} V_L = \sqrt{\frac{E}{\rho}} & V_L = \sqrt{\frac{E}{\rho} \frac{1}{1-\eta^2}} & V_L = \sqrt{\frac{E}{\rho} \frac{1-\eta}{(1+\eta)(1-2\eta)}} \\ \text{Barres} & \text{Plaques} & \text{Blocs} \end{array} \quad (3.39)$$

Ondes transverses

La déformation induite par le cisaillement s'effectuant à *volume constant*, ($\mathbf{Div} \vec{u}_T = 0$), l'effet Poisson n'intervient pas et la vitesse de l'onde transverse V_T ne dépend pas des dimensions transversales à la direction de propagation.

3.6.3 Les ondes de flexion

Les ondes de flexion des plaques et des coques

Les structures minces, comme les plaques et les coques, propagent également des ondes transversales dispersives de *flexion*. Pour des longueurs d'onde λ grandes devant l'épaisseur h mais petites devant la largeur l et la longueur L de la plaque, la propagation est régie par l'équation d'onde :

$$D \Delta^2 \xi + \rho h \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = 0 \quad \text{avec} \quad D = E^* \frac{h^3}{12} \quad \text{et} \quad E^* = \frac{E}{1-\eta^2} \quad (3.40)$$

$\xi(x_1, x_2)$ étant la déformée de la surface neutre de la plaque. Les solutions du type $\xi(\vec{x}, t) = \xi_0 \cos(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)$ conduisent à l'équation de dispersion et à la vitesse de groupe :

$$\omega = \sqrt{\frac{D}{\rho h}} k^2 \quad V_G = \frac{d\omega}{dk} = kh \sqrt{\frac{E}{1-\eta^2} \frac{1}{3\rho}} = kh \sqrt{\frac{E^*}{3\rho}} \quad (3.41)$$

Dans le cas d'une plaque mince dont deux bords parallèles de longueur L sont libres et les deux autres de largeur l soumis à conditions d'appui simple ξ ne dépend plus de y et l'équation d'onde s'écrit par intégration sur l dans la direction y :

$$Dl \frac{\partial^4 \xi}{\partial x^4} + \rho h l \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = 0 \quad E^* I \frac{\partial^4 \xi}{\partial x^4} + \rho S \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = 0 \quad (3.42)$$

avec I moment quadratique de flexion et S aire de la section droite, à :

$$\omega = \sqrt{\frac{E^* I}{\rho S}} k^2 \quad V_G = \frac{d\omega}{dk} = kh \sqrt{\frac{E^*}{3\rho}} \quad (3.43)$$

1. Pour une plaque large ($l \approx L > \lambda \gg h$) la déformation ε_{ll} est interdite (déformation plane ($\varepsilon_{ll} = 0, \sigma_{ll} \neq 0$)) et le module équivalent E^* doit être pris égal au module de déformation plane $E^* = \frac{E}{1-\eta^2}$.
2. Pour une poutre étroite ($L > \lambda \gg l \approx h$) la déformation ε_{ll} est libre (contrainte plane $\sigma_{ll} = 0, \varepsilon_{ll} \neq 0$) et le module équivalent E^* doit être pris égal au module d'Young E .

Pour une structure de masse surfacique w , l'équation d'onde s'écrit plus généralement $D \Delta^2 \xi + w \frac{d^2 \xi}{dt^2} = 0$ avec $\xi(\vec{x})$ déformée de sa surface neutre. Mais w peut varier d'un point à un autre $w = w(\vec{x})$, traduisant soit des variations locales d'épaisseur $h(\vec{x})$, soit des variations locales de masse volumique $\rho(\vec{x})$. Les solutions de la forme $\xi_i = \xi_i(\vec{x}) \cos(\omega_i t + \varphi_i)$ conduisent à l'équation $\Delta^2 \xi(\vec{x}) - w_i^2 \xi(\vec{x}) = 0$, les conditions aux limites fournissant la suite des fréquences propres w_i admissibles. L'amplitude de la déformée associée $\xi_i(\vec{x})$ est appelée mode propre d'ordre i de la structure.

Ainsi, dans le cas simple d'une plaque rectangulaire (épaisseur h et masse volumique ρ constantes, longueur L et largeur l) en appui simple sur son pourtour : déplacement $\xi(\pm \frac{L}{2}, x_2) = \xi(x_1, \pm \frac{l}{2}) = 0$ et moment fléchissant $\sim \frac{\partial^2 \xi}{\partial x_1^2}(\pm \frac{L}{2}, x_2) = \frac{\partial^2 \xi}{\partial x_2^2}(x_1, \pm \frac{l}{2}) = 0$ l'équation aux modes propres admet une solution analytique :

$$\xi_{m,n}(\vec{x}) = A \sin \frac{m\pi x_1}{L} \sin \frac{n\pi x_2}{l} \quad \omega_{m,n} = \pi^2 h \sqrt{\frac{Eh}{12w(1-\eta^2)}} \left[\left(\frac{m}{L}\right)^2 + \left(\frac{n}{l}\right)^2 \right] \quad (3.44)$$

Les modes propres de vibration d'une structure

Le déplacement $u(\vec{x}, t)$ d'un point d'une structure mince en vibration normalement à sa surface peut s'écrire à tout instant comme combinaison linéaire d'un ensemble de N modes propres :

$$u(\vec{x}, t) = \sum_{i=1}^N \eta_i(t) \xi_i(\vec{x}) \quad (3.45)$$

η_i représentant le coefficient d'influence (de pondération) du mode i . Pour une structure continue N est infini, mais on obtient en général une bonne évaluation de $u(\vec{x}, t)$ en se limitant à un nombre fini de modes. Chaque mode propre ξ_i est orthogonal relativement à la distribution de masse de la structure d'où le nom de *mode normal*.

$$\int_S w(\vec{x}) \xi_i(\vec{x}) \xi_j(\vec{x}) dS = M_i \delta_{ij} \quad (3.46)$$

M_i étant la masse généralisée du mode propre i .

Pour une structure soumise à une densité surfacique de force extérieure $\vec{F}(\vec{x}, t)$, en remplaçant $u(\vec{x}, t)$ par son développement, les équations de Lagrange du mouvement (*inertie* $m\gamma$ = forces extérieures F - *amortissement* f - *rappel élastique* K) :

$$m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = F - f \frac{\partial u}{\partial t} - K u \quad (3.47)$$

se séparent en N équations différentielles indépendantes :

$$\frac{\partial^2 \eta_i}{\partial t^2} + 2\beta_i \frac{\partial \eta_i}{\partial t} + \omega_i^2 \eta_i = \frac{F_i}{M_i} \quad \text{avec} \quad F_i = \int_S F(\vec{x}, t) \xi_i(\vec{x}) dS \quad (3.48)$$

définissant les coefficients d'influence des différents modes, F_i étant la force généralisée et β_i le coefficient d'amortissement associés au mode i . Ainsi la connaissance des modes propres d'une structure (répartition spatiale, fréquence, amortissement) permet de calculer la réponse d'une structure complexe à une sollicitation extérieure connue.

Un cas particulier important en pratique est celui d'une densité surfacique de force dont la répartition spatiale n'est pas fonction du temps : $F(\vec{x}, t) = F(\vec{x})H(t)$; la dépendance temporelle $H(t)$ étant la même en tout point. $F(\vec{x})$ peut alors se décomposer en intégrale de Fourier sous la forme : $F(\vec{x}) = \int_S F(\vec{X}) \delta(\vec{x} - \vec{X}) dS$ et la linéarité des équations permet d'obtenir la réponse de la structure à la sollicitation $F(\vec{x}, t)$ comme superposition des réponses élémentaires aux forces $F(\vec{X})H(t)$ où $F(\vec{X})$ est l'amplitude de la force ponctuelle appliquée en \vec{X} . La force généralisée du mode ξ_i est $F_i = \int_S F(\vec{x}, t) \xi_i(\vec{x}) dS = F(\vec{X}) \xi_i(\vec{X}) H(t)$ et l'équation (3.48) du coefficient d'influence du mode i devient :

$$\frac{\partial^2 \eta_i}{\partial t^2} + 2\beta_i \frac{\partial \eta_i}{\partial t} + \omega_i^2 \eta_i = \frac{F(\vec{X}) \xi_i(\vec{X})}{M_i} H(t) \quad (3.49)$$

Pour une excitation sinusoïdale $H(t) = \exp(I\omega t)$ à la pulsation ω , la solution de cette équation conduit à $\eta_i = \alpha_i(\omega)$ avec $\alpha_i(\omega) = \frac{1}{M_i} \frac{F(\vec{X}) \xi_i(\vec{X})}{(\omega_i^2 - \omega^2) + 2I\beta_i \omega}$ (I nombre imaginaire tel que $I^2 = -1$).

La réponse impulsionnelle de la structure à la force ponctuelle $F(\vec{X})H(t)$ est alors donnée par $u(\vec{x}, t) = \mathbf{Re}(\exp(I\omega t) \sum_{i=1}^N \alpha_i(\omega) \xi_i(\vec{x}))$. La réponse de la structure à la sollicitation $F(\vec{x}, t)$ s'obtient alors par superposition des réponses élémentaires ci-dessus.

La réponse du mode $\xi_i(\vec{x})$ dépend de la valeur $\xi_i(\vec{X})$ de ce mode au point \vec{X} d'application de l'excitation. Elle est maximale lorsque $\omega \approx \omega_i$. Il sera donc possible, en choisissant la fréquence d'excitation ω et le point d'application \vec{X} de l'excitation de manière adéquate, de sélectionner un mode donné. Si u_i désigne l'amplitude du déplacement pour $\omega = \omega_i$:

$$u_i(\vec{x}) \approx \frac{1}{M_i} \sum_{i=1}^N \frac{F(\vec{X}) \xi_i(\vec{X})}{2\beta_i \omega_i} \xi_i(\vec{x}) \quad (3.50)$$

L'expression de la réponse impulsionnelle s'applique également au cas d'une sollicitation à fréquence nulle, c'est à dire au cas d'une déformée statique. En faisant $\omega = 0$, la déformée statique d'une structure sous la sollicitation ponctuelle $F(\vec{X})$ au point \vec{X} s'écrit :

$$u_S(\vec{x}) = F(\vec{X}) \sum_{i=1}^N \frac{1}{M_i} \frac{\xi_i(\vec{x}) \xi_i(\vec{X})}{M_i \omega_i^2} \quad (3.51)$$

3.7 Théorèmes énergétiques en élasticité linéaire

Ces théorèmes ne s'appliquent que lorsque le matériau présente un comportement **parfaitement élastique linéaire** caractérisé par sa capacité à stocker et à restituer sans pertes la totalité du travail fourni par les efforts externes lors de la déformation.

3.7.1 Réciprocité des chargements

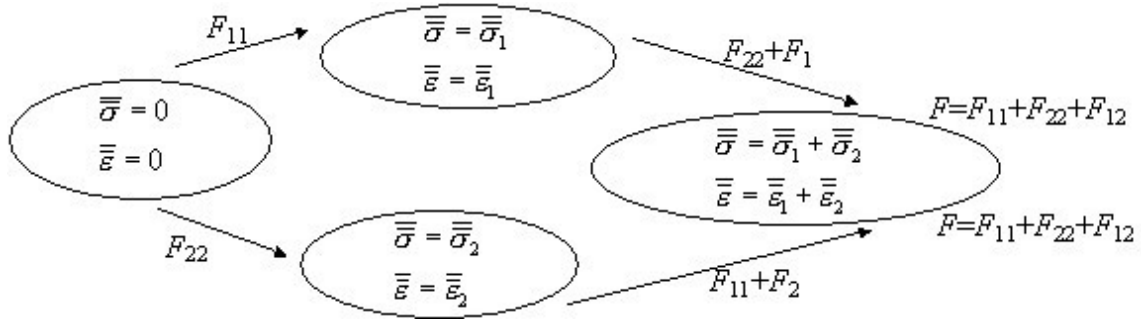


FIG. 3.13 – Réciprocité des chargements

Pour un chargement de l'état initial $\bar{\sigma} = 0, \bar{\epsilon} = 0$ à l'état final $\bar{\sigma} = \bar{\sigma}^{(1)} + \bar{\sigma}^{(2)}, \bar{\epsilon} = \bar{\epsilon}^{(1)} + \bar{\epsilon}^{(2)}$ l'énergie élastique accumulée $\mathcal{F} = \mathcal{F}_{11} + \mathcal{F}_{22} + \mathcal{F}_{12}$ selon le trajet de chargement $\bar{\sigma}^{(1)} \rightarrow \bar{\sigma}^{(2)}$ est la somme de trois termes, \mathcal{F}_{ij} désignant l'énergie élastique stockée sous l'action de la contrainte $\bar{\sigma}^{(i)}$ au cours de la déformation $\bar{\epsilon}^{(j)}$. L'application lente et réversible du premier chargement $\bar{\sigma}$ de 0 à $\bar{\sigma}^{(1)}$ entraîne une déformation proportionnelle progressive $\bar{\epsilon}$ conduisant à une déformation intermédiaire $\bar{\epsilon}^{(1)}$ et à une énergie élastique stockée $\mathcal{F}_{11} = \frac{1}{2} \text{Tr}(\bar{\sigma}^{(1)} \bar{\epsilon}^{(1)})$. A partir de cet état intermédiaire, l'application lente et réversible du second chargement $\bar{\sigma}'$ de 0 à $\bar{\sigma}^{(2)}$ entraîne une déformation proportionnelle progressive $\bar{\epsilon}'$ conduisant à une déformation finale $\bar{\epsilon}^{(2)}$ qui s'ajoute à $\bar{\epsilon}^{(1)}$ et à une énergie élastique stockée $\mathcal{F}_{22} = \frac{1}{2} \text{Tr}(\bar{\sigma}^{(2)} \bar{\epsilon}^{(2)})$. Mais durant cette étape la contrainte établie *constante* $\bar{\sigma}^{(1)}$ travaille dans le champ de déformation $\bar{\epsilon}'$ stockant l'énergie élastique $\mathcal{F}_{12} = \text{Tr}(\bar{\sigma}^{(1)} \bar{\epsilon}^{(2)})$. Dans l'état final l'énergie élastique *totale* stockée est :

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}_{11} + \mathcal{F}_{22} + \mathcal{F}_{12} = \frac{1}{2} \text{Tr}(\bar{\sigma}^{(1)} \bar{\epsilon}^{(1)}) + \frac{1}{2} \text{Tr}(\bar{\sigma}^{(2)} \bar{\epsilon}^{(2)}) + \text{Tr}(\bar{\sigma}^{(1)} \bar{\epsilon}^{(2)})$$

Pour le trajet de chargement $\bar{\sigma}^{(2)} \rightarrow \bar{\sigma}^{(1)}$ on obtient de même :

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}_{22} + \mathcal{F}_{11} + \mathcal{F}_{21} = \frac{1}{2} \text{Tr}(\bar{\sigma}^{(2)} \bar{\epsilon}^{(2)}) + \frac{1}{2} \text{Tr}(\bar{\sigma}^{(1)} \bar{\epsilon}^{(1)}) + \text{Tr}(\bar{\sigma}^{(2)} \bar{\epsilon}^{(1)})$$

\mathcal{F}_{21} représentant cette fois l'énergie élastique stockée par le travail de la contrainte *établie* $\bar{\sigma}^{(2)}$ dans le champ de déformation $\bar{\varepsilon}^{(1)}$ créée par $\bar{\sigma}^{(1)}$.

L'indépendance vis à vis du trajet suivi implique l'égalité des termes \mathcal{F}_{12} et \mathcal{F}_{21} (réciprocité).

L'énergie totale \mathcal{F} ne se réduit pas à la somme $\mathcal{F}_{11} + \mathcal{F}_{22}$ des énergies associées à chaque chargement supposé appliqué seul. Il existe un terme croisé $\mathcal{F}_{12} + \mathcal{F}_{21} = 2\mathcal{F}_{12} = 2\mathcal{F}_{21}$ qui traduit la dépendance quadratique de l'énergie. Dans l'application lente et réversible du chargement de 0 à $\bar{\sigma} = \bar{\sigma}^{(1)} + \bar{\sigma}^{(2)}$, la déformation croît proportionnellement de 0 à $\bar{\varepsilon} = \bar{\varepsilon}^{(1)} + \bar{\varepsilon}^{(2)}$ et l'énergie élastique totale stockée est bien :

$$\mathcal{F} = \frac{1}{2} \text{Tr}((\bar{\sigma}^{(1)} + \bar{\sigma}^{(2)})(\bar{\varepsilon}^{(1)} + \bar{\varepsilon}^{(2)})) = \frac{1}{2} \mathcal{F}_{11} + \frac{1}{2} (\mathcal{F}_{12} + \mathcal{F}_{21}) + \frac{1}{2} \mathcal{F}_{22}$$

Le travail de la contrainte du premier chargement dans le champ de déformation créée par le second est égal au travail de la contrainte du second chargement dans le champ de déformation créée par le premier.

3.7.2 Théorèmes énergétiques

En élasticité linéaire, dans le cas habituel où les efforts extérieurs appliqués aux structures sont prépondérants (force de volume et poids propre négligeables), le travail de déformation d'une structure de volume V se réduit au travail des forces extérieures appliquées (densité surfacique de force \vec{T} ou chargement ponctuel \vec{T}) sur sa surface S dans le champ de déplacement élastique \vec{u} qu'elles induisent et l'énergie élastique stockée s'écrit d'après (3.1) et (3.10) :

$$U^E = \frac{1}{2} W = \frac{1}{2} \int_V \text{Tr}(\bar{\sigma} \bar{\varepsilon}) dV = \frac{1}{2} \int_S \vec{T} \vec{u} dS = \frac{1}{2} \sum_i \vec{T}_i \vec{u}_i \quad (3.52)$$

de sorte que :

$$\vec{T} = \frac{\partial U^E}{\partial \vec{u}} \quad \vec{u} = \frac{\partial U^E}{\partial \vec{T}} \quad (3.53)$$

dans lesquelles \vec{T} et \vec{u} forment un couple de variables conjuguées dont le produit à la dimension d'une énergie. Il faut donc prendre ce produit au sens des charges et des déplacements généralisés, ainsi si une force correspond à un déplacement, un moment correspondra à un déplacement angulaire.

S'en déduisent trois théorèmes d'application pratique permettant de déterminer soit les efforts, soit les déplacements en calculant l'énergie élastique stockée dans la structure.

Formule de Maxwell-Betti

Avec $\int_V \text{Tr}(\bar{\sigma} \bar{\varepsilon}) dV = \int_S \vec{f} \vec{u} dS$ la réciprocité des chargements $\text{Tr}(\bar{\sigma}_1 \bar{\varepsilon}_2) = \text{Tr}(\bar{\sigma}_2 \bar{\varepsilon}_1)$ s'écrit directement sous la forme :

$$\vec{T}_1 \vec{x}_2 = \vec{T}_2 \vec{x}_1$$

Pour deux états d'équilibre d'une même structure élastique, le travail des sollicitations extérieures du 1er état dans le champ de déplacement du 2nd est égal au travail des sollicitations extérieures du 2nd état dans le champ de déplacement du 1er.

Théorème de Castigliano

L'énergie élastique U^E d'une structure supportant des charges \vec{Q} appliquées aux points \vec{X} est une fonction quadratique des $\vec{Q}(\vec{X})$ et la relation $\vec{u}(\vec{X}) = \frac{\partial U^E}{\partial \vec{Q}(\vec{X})}$ détermine le déplacement élastique \vec{u} au point \vec{X} à l'aplomb de la charge \vec{Q} .

Pour déterminer la déformée de la structure en tout point, appliquons au point \vec{x} la charge \vec{P} . L'énergie U^E devient une fonction quadratique des $\vec{Q}(\vec{X})$ et de $\vec{P}(\vec{x})$. Le déplacement \vec{u} au point \vec{x} , fonction de \vec{P} et des charges \vec{Q} , est donné par $\vec{u}(\vec{x}) = \frac{\partial U^E(\vec{Q}, \vec{P})}{\partial \vec{P}}$. Dans la limite où le chargement

$\vec{P}(\vec{x}) \rightarrow 0$, le déplacement $\vec{u}(\vec{x})$ est une fonction des seules charges \vec{Q} donnée par :

$$\vec{u}(\vec{x}) = \frac{\partial U^E(\vec{Q}(\vec{X}), \vec{P}(\vec{x}))}{\partial \vec{P}(\vec{x})} \Big|_{\vec{P}(\vec{x})=0}$$

Le théorème de Castigliano permet de calculer en tout point le champ de déplacement induit par un chargement \vec{Q} par application de la méthode dite de la *charge fictive*.

Formule de Ménabréa

Pour un problème hyperstatique où le nombre des réactions d'appuis inconnues \vec{R}_j , est supérieur au nombre d'équations de la statique et ne permet pas d'exprimer toutes les réactions en fonction de la géométrie de la structure et des charges extérieures \vec{Q}_i , l'énergie de la structure est de la forme $U^E = f(\vec{Q}_i, \vec{R}_j)$. L'équilibre correspondant au minimum de cette énergie, les réactions d'appuis seront déterminées par les relations :

$$\vec{u}_j = \frac{\partial U^E}{\partial \vec{R}_j} = 0$$

traduisant le fait que les appuis sont des points fixes.

Principe des travaux virtuels

Pour le champ de déplacement virtuel $\vec{\delta u}$ calculons :

- $\delta W_{ext}(\vec{u})$ le travail des forces extérieures (fourni au système)
- $\delta W_{int}(\vec{u})$ le travail des forces intérieures (absorbé par le système) correspondant à une augmentation de l'énergie interne

Si la différence $\Delta(\vec{\delta u}) = W_{int}(\vec{\delta u}) - W_{ext}(\vec{\delta u})$ est :

- $\Delta(\vec{\delta u}) < 0$ $\delta W_{ext}(\vec{\delta u}) > \delta W_{int}(\vec{\delta u})$ le déplacement est physiquement possible (hors équilibre)
- $\Delta(\vec{\delta u}) = 0$ $\delta W_{ext}(\vec{\delta u}) = \delta W_{int}(\vec{\delta u})$ le déplacement est le champ d'équilibre (solution d'équilibre mécanique)
- $\Delta(\vec{\delta u}) > 0$ $\delta W_{ext}(\vec{\delta u}) < \delta W_{int}(\vec{\delta u})$ le déplacement est physiquement impossible.

3.8 Flexion et flambement

3.8.1 Flexion des poutres

Flexion circulaire

Considérons un élément de poutre de section droite rectangulaire (b, h) , de longueur dx soumis à un moment de flexion M .

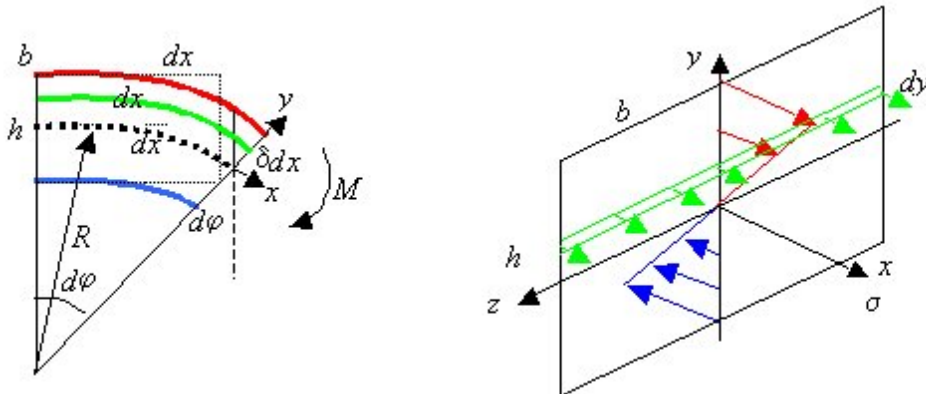


FIG. 3.14 – Flexion circulaire

Dans l'hypothèse de la flexion faible, les sections droites restent planes et tournent les unes par rapport aux autres. Ainsi, les deux sections extrêmes de l'élément de poutre de longueur dx , initialement parallèles, forment un angle $d\varphi$. La déformée de flexion de l'élément est un arc de cercle de rayon R tel que :

$$dx = Rd\varphi \quad (3.54)$$

La surface neutre ($y = 0$), l'origine étant prise au barycentre de la section droite, conservant sa longueur dx les fibres supérieures ($y > 0$) subiront un allongement et les fibres inférieures ($y < 0$) un raccourcissement $\delta dx(y)$ tel que :

$$\delta dx(y) = yd\varphi \quad (3.55)$$

La surface de cote y , ($y > 0$), subit donc une déformation d'extension à laquelle est associée une contrainte de traction :

$$\varepsilon(y) = \frac{\delta dx}{dx} = \frac{y}{R} \quad \sigma(y) = E\varepsilon = E\frac{y}{R} \quad (3.56)$$

La répartition des contraintes dans la section droite est donc invariante sur la largeur b et varie linéairement dans l'épaisseur h de l'élément de poutre, *Traction* au dessus de la surface neutre, *Compression* en dessous.

Le torseur des efforts (R, M) sur la section terminale vaut :

$$\begin{aligned} \text{Résultante} \quad R &= \int_S \sigma dS = \int_0^b dz \int_{-h/2}^{h/2} E \frac{y}{R} dy = 0 \\ \text{Moment} \quad M &= \int_S y \sigma dS = \int_0^b dz \int_{-h/2}^{h/2} E \frac{y^2}{R} dy = \frac{E}{R} I \\ \text{avec} \quad I &= \int_0^b dz \int_{-h/2}^{h/2} y^2 dy = \frac{bh^3}{12} \end{aligned}$$

I étant le moment quadratique de flexion de la section droite.

Le torseur des efforts appliqués $(0, M)$ se réduisant au moment M , les conditions aux limites seront assurées pour :

$$\frac{EI}{R} = M \quad \Rightarrow \quad \varepsilon(y) = \frac{My}{EI} \quad \sigma(y) = \frac{My}{I} \quad (3.57)$$

L'énergie élastique stockée vaut :

$$\begin{aligned} U^E &= \frac{1}{2} \int_V \sigma \varepsilon dV = \frac{1}{2} E \int_V \frac{y^2}{R^2} dV = \frac{E}{2R^2} dx \int_S y^2 dy dz = \frac{EI}{2R^2} dx = \frac{1}{2} \frac{M}{R} dx \\ U^E &= \frac{1}{2} M d\varphi \end{aligned} \quad (3.58)$$

Poutre console

Considérons une poutre de section droite rectangulaire (b, h) , de longueur L encastrée en $x = L$ et soumise à son extrémité libre ($x = 0$) à une force transversale F .

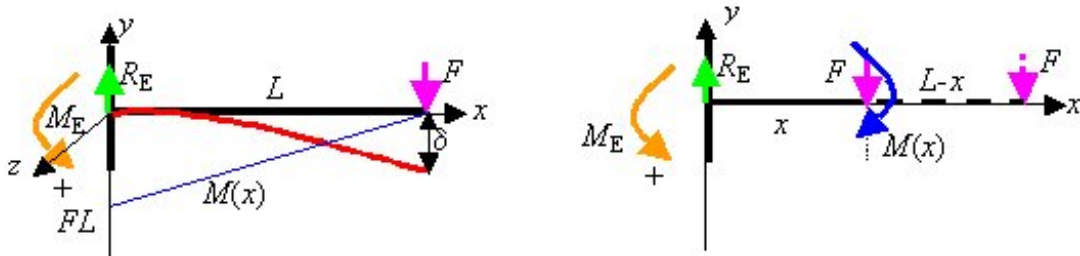


FIG. 3.15 – Poutre console

Répartition des Contraintes

- *Equilibre statique*

La force F qui tend à faire fléchir la poutre induit à l'encastrement un moment $M = FL$ qui tend à le faire pivoter dans le sens horaire. Le torseur R_E, M_E des réactions d'encastrement se compose donc d'une réaction \vec{R}_E opposée à \vec{F} et d'un moment \vec{M}_E opposé à \vec{M} tels que :

$$\begin{array}{ll} \text{Résultante} & \vec{R}_E + \vec{F} = 0 \quad R_E = F \\ \text{Moment} & \vec{M}_E + \vec{M} = 0 \quad M_E = FL \end{array}$$

- *Moment de flexion* $M(x)$

Dans une section droite d'abscisse x , l'action de la partie droite de la poutre se traduit par un torseur d'efforts $R(x), M(x)$ donné par :

$$\begin{array}{ll} \text{Effort tranchant} & \vec{R}_x = \vec{F} \\ \text{Moment fléchissant} & \vec{M}_x \text{ de module } F(L-x) \end{array}$$

- *Déformée* $y(x)$

L'équation différentielle de la déformée s'écrit :

$$\frac{EI}{R} = M(x) \quad EI \frac{d^2 y}{dx^2} = -M(x) = -F(L-x)$$

Par intégration la pente de la déformée s'écrit :

$$EI \frac{dy}{dx} = -Fx(L - \frac{x}{2}) \quad \text{tg}(\varphi) \approx \varphi = \frac{dy}{dx}(L) = \frac{FL^2}{2EI}$$

compte tenu de la condition d'encastrement $\frac{dy}{dx}(0) = 0$. φ représentant l'angle de pente d'extrémité en $x = L$.

Par intégration la déformée s'écrit :

$$EI y = -\frac{1}{2} F x^2 (L - \frac{x}{3}) \quad \delta = y(L) = \frac{FL^3}{3EI}$$

compte tenu de la condition d'encastrement $y(0) = 0$. δ représentant la flèche d'extrémité en $x = L$.

- *Contraintes* $\sigma(x, y)$

On démontre que les contraintes induites par l'effort tranchant $R(x)$ sont négligeables devant celles induites par le moment fléchissant $M(x)$ lorsque la poutre est longue : $L \gg h, b$.

En vertu de (3.57) la répartition des contraintes et celle des déformations dépendent maintenant de l'abscisse x :

$$\sigma(x, y) = \frac{M(x)y}{I} = \frac{F}{I} y(L-x) \quad \varepsilon = \frac{\sigma}{E} \quad \varepsilon(x, y) = \frac{M(x)y}{EI} = \frac{F}{EI} y(L-x) \quad (3.59)$$

Les contraintes sont maximales sur les faces externes $y = \pm \frac{h}{2}$, linéairement décroissantes de la section d'encastrement à la section terminale libre, soit :

$$\sigma_M(x) = \frac{Fh}{2I} (L-x) \quad (3.60)$$

Énergie élastique

Par calcul à l'aide des *forces internes* :

$$U^E = U^{int} = \frac{1}{2} \int_V \sigma \varepsilon dV = \frac{F^2}{2EI^2} \int_V y^2 (L-x)^2 dV = \frac{F^2}{2EI} \int_0^L (L-x)^2 dx = \frac{F^2 L^3}{6EI}$$

ou

$$U^E = U^{int} = \frac{1}{2} \int_0^L M \frac{d\varphi}{dx} dx = \frac{1}{2} \int_0^L \frac{M}{R} dx = \frac{1}{2EI} \int_0^L M^2 dx = \frac{F^2}{2EI} \int_0^L (L-x)^2 dx = \frac{F^2 L^3}{6EI}$$

Par calcul à l'aide des *forces externes* :

$$U^E = U^{ext} = \frac{1}{2} F \delta = \frac{F^2 L^3}{6EI}$$

3.8.2 Flambement des poutres

Les matériaux ne cèdent pas de la même façon suivant qu'ils travaillent en tension ou en compression. Lorsqu'un élément travaille en tension, qu'il s'agisse d'une corde, d'une tige d'acier ou du tendon d'un muscle, il s'étire tout en restant rectiligne et la rupture survient généralement à l'endroit le plus faible de l'élément. En revanche le comportement des matériaux vis-à-vis d'une compression dépend de leur longueur. Une courte tige de métal, un petit mur de brique ou un os court conservera sa forme sous compression jusqu'au moment où se produira un phénomène de destruction par écrasement local. Pour une même force de compression, une tige plus longue mais de même section, un mur plus haut ou un mât de bateau se courbera avant de rompre. La flexion d'un solide rectiligne et allongé sous l'effet de forces qui le compriment suivant sa longueur est une instabilité mécanique appelée flambage, ou encore flambement.

Charge critique de flambage

Le flambage est une transition vers une configuration de plus basse énergie. Lors de la compression d'une tige par une force F , la structure commence par se comprimer jusqu'à une force critique F_C au delà de laquelle la configuration flambée est énergétiquement plus favorable. L'analyse linéaire permet de déterminer la force critique F_C seuil de l'instabilité mais ne fournit aucune indication sur l'évolution du système pour des efforts appliqués $F > F_C$. Le flambage est analogue à la flexion dont il se distingue par l'existence de la force seuil F_C .

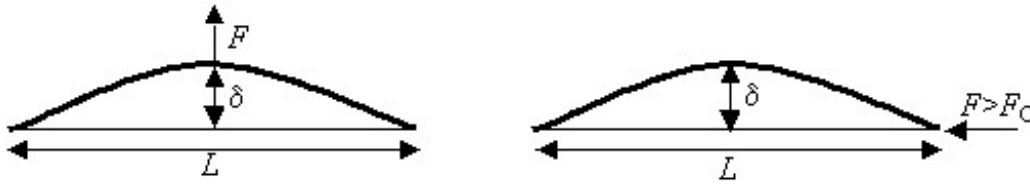


FIG. 3.16 – Flexion et Flambement

Considérons, comme état de référence, une tige de longueur L , de moment d'inertie I et de module d'Young E comprimée par la force F_C au seuil de la transition entre la compression et le flambement. Juste au delà du seuil de flambement $F \simeq F_C$ la déformée caractérisée par sa flèche *petite* δ est régie par l'équation de flexion faible $\frac{EI}{R} = -M(x)$. En estimant la courbure $\frac{1}{R} \approx \frac{d^2y}{dx^2} \sim \frac{\delta}{L^2}$ et le moment fléchissant $M \sim F_C \delta$, la charge critique de flambage est donnée par :

$$F_C \sim \frac{EI}{L^2} \quad (3.61)$$

Charge critique d'Euler

La force de compression axiale F_C susceptible de produire le flambage d'une tige ou d'une colonne calculée exactement par le mathématicien suisse Léonard Euler (1707-1783) est :

$$F_C = k \frac{EI}{L^2} = \frac{\pi^2 EI}{L_{eff}^2} \quad (3.62)$$

k étant une constante sans dimension qui dépend des degrés de liberté des extrémités de la tige et L_{eff} la longueur de la poutre en appuis simples admettant la même charge critique F_C .

La force qui provoque le flambage dépend :

- de l'inverse du carré de la longueur libre de la tige

Plus la tige est courte, mieux elle résiste. Ce résultat a une énorme influence pratique sur la forme et le poids des structures, tant artificielles que naturelles.

- de la rigidité de la tige

Pour résister au flambage, un module de Young élevé est essentiel d'où l'élaboration fibres spéciales à haute rigidité - en bore ou en graphite - pour produire des matériaux composites très performants.

<i>Appui</i>	<i>Charge d'Euler F_C</i>	<i>Longueur effective L_{eff}</i>
Simple-simple	1	L
Encastré-encastré	4	$\frac{1}{2}L$
Encastré-simple	2,04	$0,7L$
Encastré-libre	$\frac{1}{4}$	$2L$

TAB. 3.1 – Valeurs de k et de L_{eff} pour quelques types d'appui

– *du moment d'inertie de la section droite*

La gamme des matériaux à module d'Young élevé étant restreinte, un moyen simple et économique pour rigidifier une tige consiste à changer la géométrie de sa section pour augmenter sa raideur à masse constante. Le moment d'inertie de flexion étant $I = \int_S y^2 dS$ et la masse linéique $m = \rho \int_S dS$ la structure la plus rigide en flexion à masse donnée sera celle qui repoussera la matière le plus loin possible de l'axe de flexion.

La charge de flambage d'une tige n'est pas nécessairement sa charge de rupture. Pour une tige longue le flambage peut survenir pour des chargements très faibles. De ce fait, si la force de compression disparaît, la tige peut se redresser sans dommage. C'est le mécanisme de défense des poils de tapis ou de paillason, des herbes et des jeunes pousses que l'on piétine.

Coefficient de charge et critère de qualité du matériau

La comparaison de l'efficacité d'éléments structuraux travaillant en tension ou en compression passe par l'estimation du poids minimal de l'élément capable de supporter une charge F donnée sur une portée L donnée : son coût pondéral. Comme la résistance d'un élément travaillant en traction est quasi indépendante de L alors que celle d'un élément comprimé, limitée par le flambage d'Euler, diminue comme L^{-2} , le coût pondéral peut varier énormément.

Un rapport simple permet de quantifier l'efficacité d'un élément : son coefficient de charge C défini comme le rapport de la charge F à la portée L :

$$C = \frac{F}{L} \quad (3.63)$$

Plus C est élevé, plus l'élément est efficace en compression. L'efficacité croît si la conception d'ensemble de la structure permet d'augmenter la charge ou de réduire la portée.

Ainsi une bicyclette possède des roues de grand diamètre peu chargées. C est petit le gain en poids est substantiel en utilisant des rayons travaillant en traction.

La charge d'une automobile est plus importante et le diamètre des roues plus petit. C est grand et les jantes travaillent en compression.

L'augmentation du coefficient de charge est un moyen commode d'éviter le flambage. Ce n'est pas toujours possible, la portée et la charge roulante d'un pont sont des données incontournables. Dans les structures à faible coefficient de charge, il est plus difficile de traiter efficacement les charges compressives que les charges en tension. C'est pourtant une situation très courante, aussi bien dans les structures biologiques que dans celles fabriquées par l'homme. Il faut donc trouver des moyens de résoudre ce problème sans inconvénient rédhibitoire.

Trois moyens sont utilisés pour éviter le flambage sans entraîner pour autant des poids ou des coûts supplémentaires quand le coefficient de charge de la structure C est faible :

- La *précontrainte* du matériau en appliquant une tension préalable aux éléments qui risqueraient de plier. Le gonflage des pneus évitant le flambement des flancs ou la pression hydrostatique de la sève empêchant le flambage des parois des cellules animales ou végétales en sont des exemples.
- Le choix de la *forme de la section* afin d'augmenter le moment d'inertie. Les structures pleines sont remplacées par des tubes creux (bambou, la plupart des os) ou des profilés. Les matériaux en plaques ou en feuilles peuvent être dotés de renforts plissés, collés ou soudés (tôle ondulée) ou constitués de structures sandwich plissées (carton) ou nid d'abeille (cloisons placoplâtre).

- Par le choix du matériau le plus favorable. A faible coefficient de charge certains matériaux résistent beaucoup mieux que d'autres à la compression. Pour une charge de flambement F et une portée L fixées le module élastique E et le moment d'inertie I vérifient la relation d'Euler $F \sim \frac{EI}{L^2}$. La masse de la structure portante est $m = \rho LS$ (S aire de section droite et ρ masse volumique du matériau). La structure la plus efficace tant du point de vue pondéral que du point de vue économique sera la structure la plus légère. La géométrie de la section droite va fixer la relation $S = f(I) \sim f(\frac{FL^2}{E})$, soit $m \sim \rho L f(\frac{FL^2}{E})$.
- La dimension caractéristique de section droite d'une tige est $\sqrt{I} \ll L$ son moment d'inertie $I \sim (\sqrt{I})^4$ soit $S \sim \sqrt{I}$ et une masse $m \sim \frac{\rho}{\sqrt{E}} L^2 \sqrt{F}$.
- Les dimensions caractéristiques de section droite des panneaux sont l'épaisseur $h \ll L$ et la largeur l de l'ordre de L . $S \sim Lh$ et $I \sim Lh^3$, soit $S \sim (IL^2)^{1/3}$ et une masse $m = \rho E^{-1/3} L^{7/3} F^{1/3}$.

La quantité critique est le rapport $\frac{\rho}{\sqrt{E}}$ (tiges) ou $\frac{\rho}{E^{1/3}}$ (panneaux). On utilise pour les comparaisons les rapports inverses appelés critères de qualité du matériau. Plus ces rapports sont grands, plus le matériau résiste à la compression.

Matériau	E (Mpa)	ρ ($kg.dm^{-3}$)	$\frac{\sqrt{E}}{\rho}$	$\frac{E^{1/3}}{\rho}$
Acier	210000	7,8	59	7,7
Aluminium	73000	2,8	99	15,0
Béton	15000	2,5	49	10,0
Composites fibre de carbone	200	2,0	223	29,0
Bois tendre	10000	0,35	290	61,4
Bois dur	12000	0,65	170	35,5

TAB. 3.2 – Critères de qualité typiques de quelques matériaux

On peut se servir de ces deux critères de qualité pour classer divers matériaux naturels ou synthétiques en fonction de leur résistance au flambage. Le tableau illustre la raison des choix faits à la fois dans l'industrie et par la nature. Ainsi, pour fabriquer des panneaux, l'aluminium est environ deux fois plus efficace que l'acier, ce qui explique son emploi pour le fuselage et les ailes des avions. L'acier reste très utilisé parce qu'il est facile d'augmenter le moment d'inertie I de la section (profilés, raidisseurs soudés ou rivetés). Le bois est un matériau à critère de qualité élevé très utilisé depuis la mise au point de colles efficaces et de traitement anti-pourrissement.

3.9 Le contact

Lorsque deux corps en contact ponctuel sont pressés l'un contre l'autre, ils se déforment localement pour créer une aire de contact de dimension caractéristique a petite devant les rayons de courbure R des deux corps au point de contact, aire sur laquelle se répartit l'effort de contact. Les contraintes σ induites sont ainsi concentrées dans une petite région autour du point de contact et leur intensité décroît rapidement lorsque l'on s'en éloigne.

3.9.1 Le contact : phénomène mécanique local

Sous l'action d'une charge normale concentrée F agissant sur un milieu élastique semi infini la contrainte radiale σ_{rr} dépend, par symétrie, de la distance r au point d'application de la charge. L'équilibre d'une demi sphère $d = 3$ (ou d'un demi cylindre de longueur unité en dimension $d = 2$) dont la surface est d'ordre $S \sim r^{d-1}$ s'écrit $F \sim \sigma_{rr} S$ et conduit à la loi variation de la contrainte :

$$\sigma \sim \frac{1}{r^{d-1}} \quad (3.64)$$

En élasticité linéaire il en va de même pour les déformations et la variation du déplacement s'obtient par intégration :

$$\begin{aligned} d = 2 & \quad \sigma \sim \frac{1}{r} & \quad \varepsilon \sim \frac{1}{r} & \quad u \sim \ln r \\ d = 3 & \quad \sigma \sim \frac{1}{r^2} & \quad \varepsilon \sim \frac{1}{r^2} & \quad u \sim \frac{1}{r} \end{aligned} \quad (3.65)$$

Les contraintes décroissent rapidement lorsque l'on s'éloigne du point de contact. Le contact est un phénomène mécanique *local*. Pour autant que les dimensions L (et pas seulement les rayons de courbure R) des corps en contact soient grandes devant celle a de l'aire de contact, la distribution des contraintes de contact ne dépend pas de manière critique ni de la forme exacte des corps loin de cette zone, ni du détail du mode de transmission vers la région de contact des efforts extérieurs appliqués. Quelque soit la manière dont la pression p se répartit sur l'aire de contact, la distribution des contraintes et des déplacements tend lorsque $r \gg a$ vers celle créée par la force concentrée F égale à l'intégrale de p sur l'aire de contact. La distribution des contraintes peut être calculée avec une bonne approximation en considérant, qu'à l'échelle de l'aire de contact, chacun des deux corps est un solide semi infini limité par un plan, le plan de contact et les contraintes se concentrent dans un petit volume de dimension caractéristique a^d autour du point de contact. Pour des déformations suffisamment faibles pour rester dans le domaine de validité de l'élasticité linéaire, la solution d'un problème de contact s'obtient par application du principe de superposition une fois connue la réponse en déplacement et en contrainte à une charge ponctuelle concentrée au point de contact. Cette approximation est mise en défaut en ce qui concerne les déplacements résultant d'un contact en dimension $d = 2$ par suite de la divergence logarithmique $u \sim \ln r$. Il faut alors tenir compte de la forme réelle des corps pour lever l'indétermination résultant de cette approximation.

3.9.2 Le contact en dimension $d = 3$

Le problème du contact en dimension $d = 3$ se ramène à celui du demi espace élastique limité par un plan infini chargé par une distribution de forces $\vec{F}(\vec{x}')$ qui ne doit satisfaire qu'à l'unique condition de s'annuler à l'infini afin de pouvoir définir une zone de contact loin de laquelle les déformations s'annulent.

Le tenseur de Green du contact

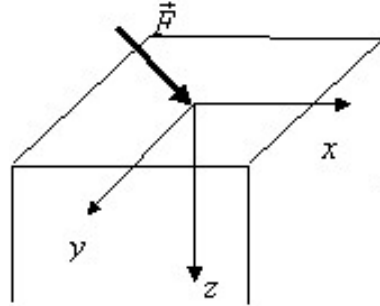


FIG. 3.17 – Contact ponctuel en dimension 3

Dans le demi espace, le contact doit satisfaire l'équation de l'équilibre élastique : $\mathbf{Grad}(\mathbf{Div} \vec{u}) + (1 - 2\eta)\Delta \vec{u} = 0$ et les *conditions aux limites* $\sigma_{iz} = -F_i$ sur le plan $z = 0$, le vecteur unitaire de la normale au milieu étant dirigé dans le sens des z négatifs. Par convention \vec{x}' désigne un vecteur appartenant au plan de contact $z = 0$ et \vec{x} un vecteur quelconque du demi espace, pouvant éventuellement appartenir au plan de contact. Le champ de déplacement \vec{u} , créé au point \vec{x} par une charge ponctuelle \vec{F} placée à l'origine est :

$$\begin{aligned} u_x &= \frac{1}{4\pi G} \left\{ \frac{2(1-\eta)r+z}{r(r+z)} F_x + \frac{[2r(\eta r+z)+z^2]x}{r^3(r+z)^2} (xF_x + yF_y) + \left[\frac{xz}{r^3} - (1-2\eta)\frac{x}{r(r+z)} \right] F_z \right\} \\ u_y &= \frac{1}{4\pi G} \left\{ \frac{2(1-\eta)r+z}{r(r+z)} F_y + \frac{[2r(\eta r+z)+z^2]y}{r^3(r+z)^2} (xF_x + yF_y) + \left[\frac{yz}{r^3} - (1-2\eta)\frac{y}{r(r+z)} \right] F_z \right\} \\ u_z &= \frac{1}{4\pi G} \left\{ \left[\frac{1-2\eta}{r(r+z)} + \frac{z}{r^3} \right] (xF_x + yF_y) + \left[\frac{2(1-\eta)}{r} + \frac{z^2}{r^3} \right] F_z \right\} \end{aligned} \quad (3.66)$$

avec $G = \frac{E}{2(1+\eta)}$ et $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Ces relations conduisent à la définition du tenseur de Green $\bar{\bar{G}}$ (réponse en déplacement à une force concentrée à l'origine) du contact :

$$\vec{u}(\vec{x}) = \bar{\bar{G}}(\vec{x}) \vec{F} \quad (3.67)$$

La solution générale du contact élastique

Par application du principe de superposition la solution du problème de contact élastique de densité surfacique de force $\vec{F}(\vec{x}')$ quelconque se met sous la forme :

$$\vec{u}(\vec{x}) = \int_S \vec{G}(\vec{x}' - \vec{x}) \vec{F}(\vec{x}') d\vec{x}' \quad (3.68)$$

Le tenseur des déformations s'en déduit facilement par la relation $2\vec{\varepsilon} = \mathbf{Grad} \vec{u} + {}^t\mathbf{Grad} \vec{u}$ et celui tenseur des contraintes par la loi de Hooke $E\vec{\varepsilon} = (1 + \eta)\vec{\sigma} - \eta \text{Tr}(\vec{\sigma})\vec{\delta}$.

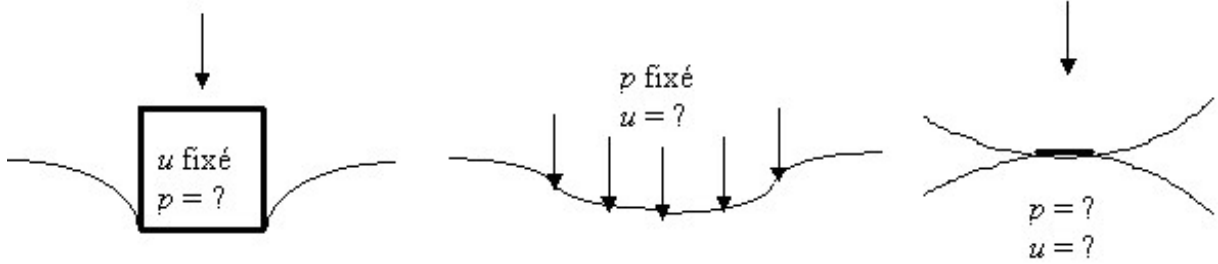


FIG. 3.18 – Les différents types de contact : poinçonnement - pression imposée - Hertz

Bien que ces équations fournissent la solution formelle des problèmes de contact, champs de déplacement, déformation et contraintes, lorsque la distribution surfacique des charges est connue, les solutions analytiques n'existent que pour des géométries et des chargements particuliers. Il en va de même pour la solution du problème inverse dans le cas où le champ de déplacement est imposé dans la zone de contact (poinçonnement) ou dans celui du contact de Hertz dans lequel les corps en contact soumis à un chargement extérieur s'adaptent l'un à l'autre en se déformant mutuellement de sorte que ni la répartition des contraintes dans l'aire de contact, ni les déformations ne sont connues à priori. Il faudra alors recourir à d'autres approches.

3.9.3 Poinçon plan rigide à base circulaire sous chargement normal

La répartition de pression $p(\rho)$ compatible avec la condition $u_z = Cte = \delta$ sous le poinçon est $p(\rho) = \frac{p_0}{\sqrt{1 - \frac{\rho^2}{a^2}}}$. La charge totale est $P = \int_S p(\rho) dS = 2\pi a^2 p_0$ et la pression moyenne $p_m = \frac{P}{\pi a^2} = 2p_0$.

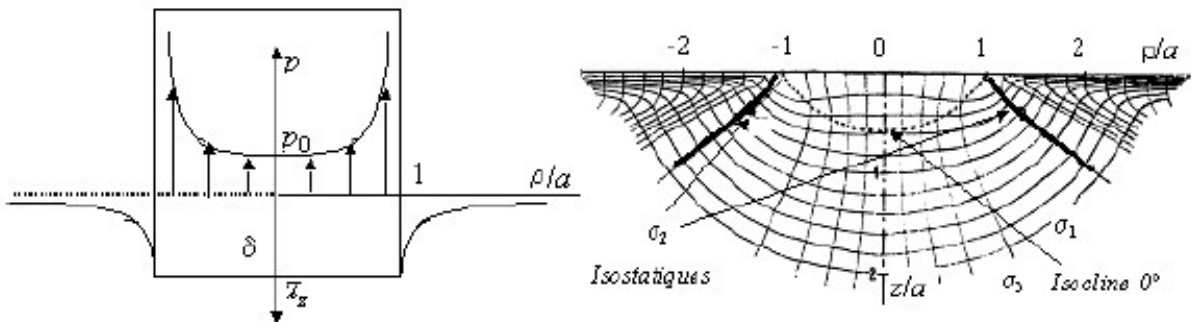
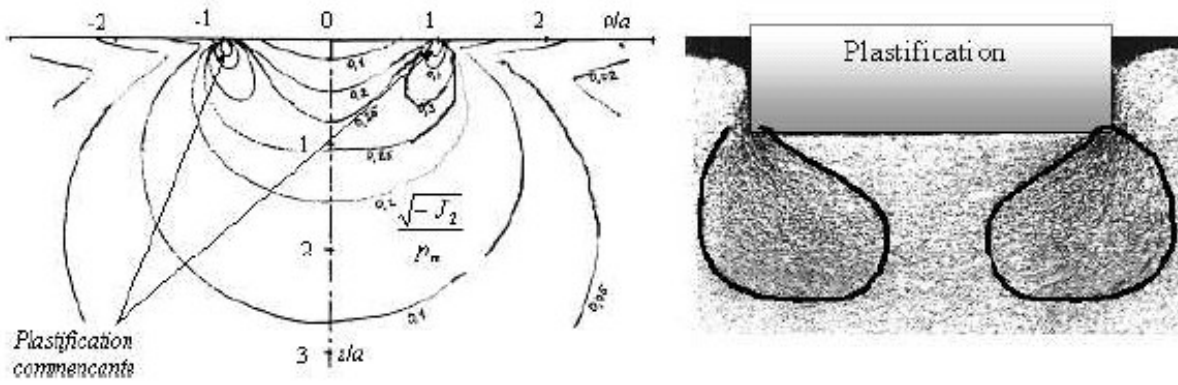


FIG. 3.19 – Répartition de pression et isostatiques du poinçonnement

Le calcul des intégrales de superposition (Sneddon 1946) conduit au champ de déplacement dont on déduit les champs de déformation et de contrainte.

Plastification et rupture

Du fait de la discontinuité des contraintes sur le pourtour de l'aire de contact, le cisaillement γ est maximal et la plastification s'amorce sur le pourtour de l'aire de contact comme le montre

FIG. 3.20 – Plastification : Isovaleurs de Van Mises - Coupe d'un laiton α poinçonné

expérimentalement la coupe d'un poinçonnement dans du laiton α et théoriquement les isovaleurs de Van Mises. La rupture se produira dans un matériau fragile à partir du pourtour de l'aire de contact comme le montre les isostatiques de la figure 3.19.

3.9.4 Le contact de Hertz

Lorsque deux corps élastiques entrent en contact ponctuel, ils s'écrasent localement (se déforment) de manière à former une aire de contact non nulle. Il s'agit d'un problème complexe puisque ni l'aire de contact ni la répartition de charge qui en résulte ne sont connues à priori.

Approche dimensionnelle

Dans le contact élastique de Hertz il est intéressant d'estimer comment les déformations et les contraintes croissent avec la charge P appliquée à l'aide d'un raisonnement dimensionnel. De ce fait on peut se limiter au cas simple de deux sphères en contact selon une aire circulaire plane de rayon a sous l'action d'une force pressante P normale à l'aire de contact. Chaque sphère de rayon R_i est un solide élastique linéaire caractérisé par son module d'Young E_i et son coefficient de Poisson η_i . L'écrasement δ_i des surfaces s'effectuant parallèlement à l'axe des centres, il n'y a pas de déplacement dans le plan de contact. Il s'agit d'un problème de déformation plane et le module élastique à prendre en compte est $E_i^* = \frac{E_i}{1-\eta_i^2}$.

Tant que $\delta_i \ll a$ ou $a \ll R_i$ l'état de déformation dans chaque corps au voisinage de la zone de contact est défini par une déformation $\varepsilon_i \sim \frac{\delta_i}{a}$ correspondant au rapport d'un déplacement δ_i sur une base initiale de longueur a . On aurait pu naïvement procéder à une estimation du type $\varepsilon_i \sim \frac{\delta_i}{R_i}$ mais cela aurait été en contradiction avec l'aspect localisée de la déformation de contact. La pression de contact $\sigma \sim \frac{P}{a^2}$ induit dans la région de contact les déformations $\varepsilon_i \sim \frac{\sigma}{E_i^*} \sim \frac{P}{a^2 E_i^*}$ et l'écrasement total $\delta = \delta_1 + \delta_2 \sim a(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) \sim \frac{P}{a^2 E^*}$, E^* module élastique équivalent du contact tel que $\frac{1}{E^*} = \frac{1}{E_1^*} + \frac{1}{E_2^*}$.

Mais l'écrasement δ_i est relié à la courbure de la sphère par la relation $\frac{1}{R_i} \approx \frac{d^2 z}{d\rho^2} \sim \frac{\delta_i}{a^2}$ de sorte que l'écrasement total $\delta \sim \frac{a^2}{R^*}$, R^* rayon équivalent du contact défini par $\frac{1}{R^*} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$.

Il résulte de l'égalité des deux expressions de δ la loi du contact de Hertz :

$$P \sim \frac{E^* a^3}{R^*} \quad P \sim E^* \sqrt{R^*} \delta^{1/2} \quad a^3 \sim \frac{P R^*}{E^*} \quad \delta \sim \frac{a^2}{R^*} \quad (3.69)$$

Le contact de Hertz est un exemple de *comportement macrosopique force déplacement non linéaire* bien que le comportement *microscopique contrainte déformation* du matériau soit *linéaire*. L'énergie élastique accumulée dans le contact est donnée par :

$$U^E = \int_0^\delta P d\delta \sim \frac{2}{3} \int_0^P \frac{P^{2/3}}{E^{*2/3} R^{*1/3}} dP = \frac{2}{5} \frac{P^{5/3}}{E^{*2/3} R^{*1/3}} = \frac{2}{5} P \delta \quad (3.70)$$

Du fait de la non linéarité de la loi du contact, $P \sim E^* R^{1/2} \delta^{3/2}$ l'expression $U^E = \frac{1}{2} P \delta$ n'est pas applicable. La pénétration δ ne peut pas être calculée par dérivation de l'énergie élastique U^E par rapport à la charge appliquée P . Il faut également déterminer le potentiel complémentaire Ω :

$$\begin{aligned} U^E &= \int_0^\delta P d\delta = \frac{2}{5} \frac{P^{5/3}}{E^{*2/3} R^{*1/3}} = \frac{2}{5} E^* R^{*1/2} \delta^{5/2} = \frac{2}{5} P \delta = \frac{2}{5} E^* \frac{a^5}{R^{*2}} & P &= \frac{dU^E}{d\delta} = E^* \sqrt{R^*} \delta^{1/2} \\ \Omega &= \int_0^P \delta dP = P \delta - U^E = \frac{3}{5} P \delta = \frac{3}{5} E^* R^{*1/2} \delta^{5/2} = \frac{2}{5} \frac{P^{5/3}}{E^{*2/3} R^{*1/3}} & \delta &= \frac{d\Omega}{dP} = \frac{P^{2/3}}{E^{*2/3} R^{*1/3}} \end{aligned} \quad (3.71)$$

Mais U^E s'écrit aussi $U^E = \frac{1}{2} \int_V \sigma \varepsilon dV$ puisque la relation *microscopique* $\sigma = E^* \varepsilon$ est *linéaire*. En estimant comme précédemment $\varepsilon \sim \frac{\delta}{a}$, $U^E \sim E^* (\frac{\delta}{a})^2 V = E^* \frac{a^2}{R^{*2}} V$, V étant le volume des corps dans lesquels agissent les déformations d'écrasement, la comparaison des deux expressions de U^E conduit à $V \sim a^3$ traduisant l'aspect local des déformations de contact.

Contact bille rigide - plan déformable

Ce problème particulier est associé aux essais de dureté Rockwell et Brinell qui donnent accès à la résistance plastique d'un matériau par la mesure de la taille de l'empreinte plastique produite par une bille rigide pressée contre l'échantillon plan.

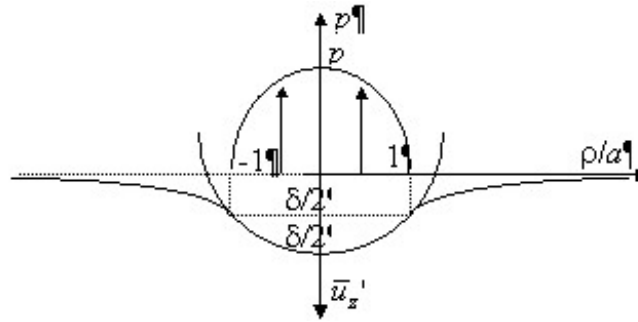


FIG. 3.21 – Contact de Hertz : bille rigide sur plan déformable

Dans l'aire de contact circulaire de rayon a petit devant le rayon R du pénétrateur sphérique rigide, l'enfoncement u_z de la surface plane, assimilé à la parabole ausculatrice, est $u_z = \delta(1 - \frac{1}{2} \frac{\rho^2}{a^2})$. La répartition de pression de Hertz $p(\rho)$ compatible avec cette condition, la charge totale P et la pression moyenne p_m sont données par :

$$p(\rho) = p_0 \sqrt{1 - \frac{\rho^2}{a^2}} \quad P = \int_S p(\rho) dS = \frac{2}{3} \pi a^2 p_0 \quad p_m = \frac{P}{\pi a^2} = \frac{2}{3} p_0. \quad (3.72)$$

Le calcul des intégrales de superposition (Huber 1904) conduit au champ de déplacement dont on déduit les champs de déformation et de contrainte.

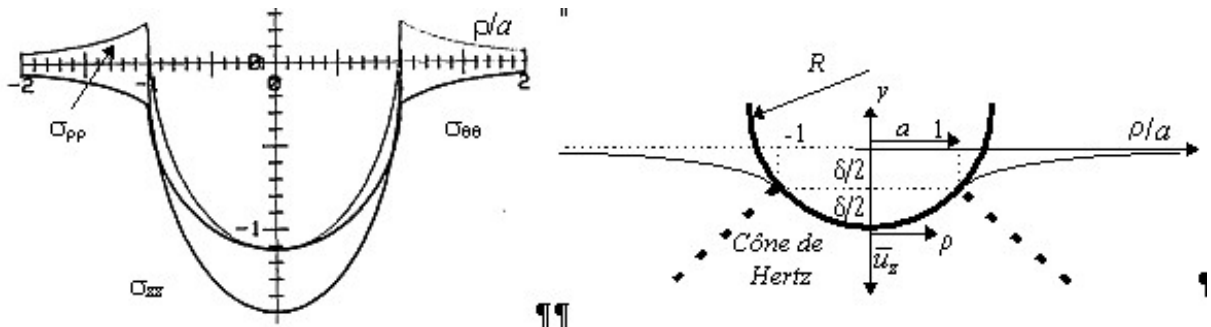


FIG. 3.22 – Répartition des contraintes en surface

La contrainte radiale $\sigma_{\rho\rho}$ prend sa valeur maximale $p_0 \frac{1+2\nu}{3}$ sur le pourtour de l'aire de contact. Le poinçonnement d'un matériau fragile, comme un bloc de verre, par un indenteur sphérique rigide

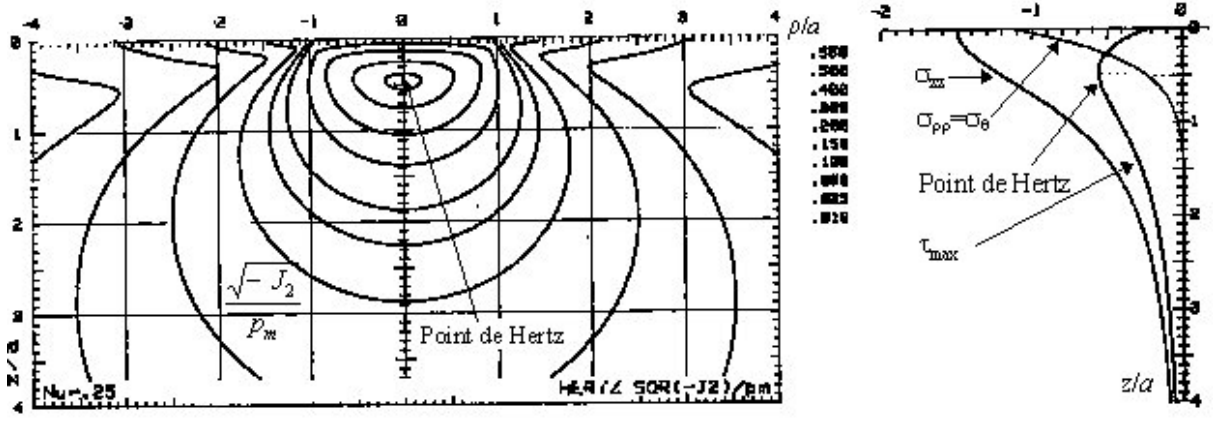


FIG. 3.23 – La plastification commence sur l'axe, sous l'aire de contact, au point de Hertz

de rayon R ne produit pas de plastification sous l'aire de contact mais une rupture qui s'initie sous la forme d'un anneau circulaire de rayon a tel que $\sigma_{\rho\rho} = \sigma_R$, où σ_R est la contrainte de rupture du matériau.

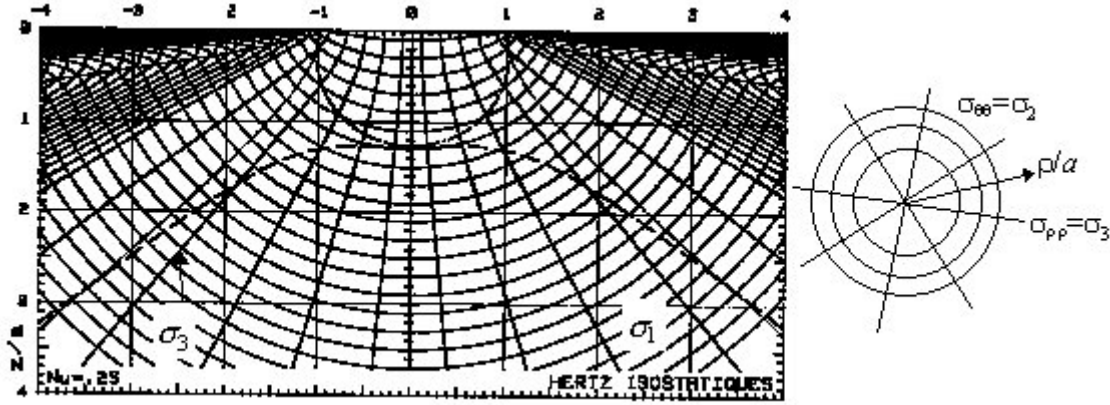


FIG. 3.24 – Isostatiques et cône de rupture de Hertz

La rupture se produit le long de l'isostatique σ_3 et conduit à la formation d'un tronc de cône de rupture, le cône de Hertz.

3.10 Résumé Élasticité

Loi de Hooke

$$\begin{array}{ll}
 E\bar{\bar{\varepsilon}} = -\eta\mathbf{Tr}(\bar{\bar{\sigma}})\bar{\bar{\delta}} + (1+\eta)\bar{\bar{\sigma}} & \text{Young} \quad E\varepsilon_{ij} = -\eta\sigma_{kk}\delta_{ij} + (1+\eta)\sigma_{ij} \\
 \sigma = \lambda\mathbf{Tr}(\bar{\bar{\varepsilon}})\bar{\bar{\delta}} + 2\mu\bar{\bar{\varepsilon}} & \text{Lame} \quad \sigma_{ij} = \lambda\varepsilon_{kk}\delta_{ij} + 2\mu\varepsilon_{ij} \\
 \bar{\bar{S}}_\sigma = 3K\bar{\bar{S}}_\varepsilon & \text{Hooke} \quad \bar{\bar{D}}_\sigma = 2\mu\bar{\bar{D}}_\varepsilon \quad \bar{\bar{\pi}}_\sigma = \bar{\bar{\pi}}_\varepsilon
 \end{array}$$

Équation de Lamé en déplacement

$$\begin{aligned}
 (\lambda + \mu)\mathbf{Grad}(\mathbf{Div} \vec{u}) + \mu\Delta \vec{u} + \rho\vec{X} &= \rho \frac{d^2 \vec{u}}{dt^2} \\
 (\lambda + \mu)\mathbf{Rot}(\mathbf{Rot} \vec{u}) + (\lambda + 2\mu)\Delta \vec{u} + \rho\vec{X} &= \rho \frac{d^2 \vec{u}}{dt^2} \\
 \frac{1}{1-2\eta}\mathbf{Grad}(\mathbf{Div} \vec{u}) + \Delta \vec{u} + \frac{\rho}{\mu}\vec{X} &= \frac{\rho}{\mu} \frac{d^2 \vec{u}}{dt^2}
 \end{aligned}$$

Relations entre les modules élastiques

$$\begin{array}{ll}
 \lambda = \frac{\eta E}{(1+\eta)(1-2\eta)} & G = \mu = \frac{E}{2(1+\eta)} \\
 E = \frac{\mu(3\lambda+2\mu)}{\lambda+\mu} & \eta = \frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)} \\
 K = \frac{E}{3(1-2\eta)} & K = \lambda + \frac{2}{3}\mu
 \end{array}$$

Potentiel d'élasticité et énergie élastique

Le travail de déformation W s'écrit soit en terme de forces externes, soit en terme de forces internes :

$$W = \int_V \mathbf{Tr}(\overline{\sigma} \overline{\varepsilon}) dV = \int_V \vec{f} \cdot \vec{u} dV + \int_S \vec{T} \cdot \vec{u} dS$$

En l'absence de forces de volume, l'énergie élastique stockée s'écrit :

$$\begin{aligned} \frac{dU^E}{dV} &= \int_0^{\overline{\varepsilon}} \mathbf{Tr}(\overline{\sigma} d\overline{\varepsilon}) & \Rightarrow & \text{élasticité linéaire} \\ U^E &= \int_V \frac{dU^E}{dV} dV = \int_S \vec{T} \cdot \vec{u} dS & \frac{dU^E}{dV} &= \frac{1}{2} \mathbf{Tr}(\overline{\sigma} \overline{\varepsilon}) \\ & & U^E &= \frac{1}{2} \int_S \vec{T} \cdot \vec{u} dS \end{aligned}$$

Chapitre 4

PLASTICITÉ

Lorsqu'un matériau est sollicité jusqu'à rupture, les essais montrent que la contrainte de rupture σ_R est une grandeur présentant de fortes fluctuations pouvant même dépasser la décade pour certains matériaux et que le mode de ruine dépend de la nature du matériau. Ainsi la rupture peut intervenir brutalement quasi sans déformation préalable pour les matériaux qualifiés aujourd'hui de *fragiles*, tandis qu'elle n'intervient qu'après une étape de grande déformation permanente pour les matériaux qualifiés aujourd'hui de *ductiles*. Nous savons maintenant que les matériaux fragiles rompent brutalement au delà d'une certaine tension, tandis que les matériaux *ductiles s'écoulent plastiquement avant de rompre sous cisaillement*. Si la rupture est toujours l'étape ultime de la ruine des structures, elle est précédée d'une étape de plastification pour les matériaux ductiles.

4.1 Le comportement plastique

Le comportement plastique est celui d'un corps *solide* qui prend des *déformations permanentes* sans se fissurer. On admet généralement que ces déformations permanentes se produisent au delà d'un seuil de contrainte appelé *seuil de plasticité* ou *limite d'élasticité*.

4.1.1 Le seuil de plasticité

En dessous du seuil de plasticité les déformations ne restent pas toujours parfaitement élastiques (frottements internes), mais après décharge, le corps doit reprendre progressivement mais intégralement sa forme initiale. Le seuil de plasticité doit être vu comme une schématisation commode : au delà du seuil les déformations permanentes deviennent beaucoup plus importantes que les déformations élastiques. La définition du seuil est conventionnelle (*cf.* Fig. 4.1) et dépend de la précision des moyens de mesure utilisés. La limite d'élasticité vraie (point *A*) définie par la valeur de la contrainte σ_V qui produit une déformation permanente dans le premier grain de la microstructure du matériau est inaccessible à la mesure expérimentale. Lorsque le nombre de grains plastifiés augmente la déformation permanente devient accessible à la mesure. Elle est définie comme la déformation ε_p mesurée après une décharge élastique (trajet *BC*) qui récupère la partie de déformation élastique ε_e , les propriétés élastiques (modules élastiques) étant supposées raisonnablement non modifiées par le très faible taux de plastification subit par le matériau (identité des pentes des trajets *OA* et *BC*). A cette déformation définie conventionnellement par $\varepsilon_p = 2.10^{-2}$ (ou 10^{-5} selon la précision des moyens de mesure utilisés) correspond le seuil d'élasticité conventionnelle $\sigma_C(\varepsilon_p)$ appelé *seuil de plasticité*. En pratique, le seuil de plasticité est appelé limite d'élasticité σ_e du matériau, terminologie prêtant à confusion puisqu'il s'agit en réalité d'une limite d'élasticité conventionnelle.

En général la résistance à la déformation plastique dépend plus ou moins, selon les matériaux et la température, de la vitesse de déformation (*visco-plasticité*) et de l'histoire des déformations permanentes déjà subies par le matériau soit au cours du processus d'élaboration, soit au cours de sollicitations antérieures (*écrouissage*). On constate expérimentalement que lorsqu'un solide a été soumis à une contrainte non isotrope, il possède vis-à-vis d'un nouveau chargement un seuil égal à la

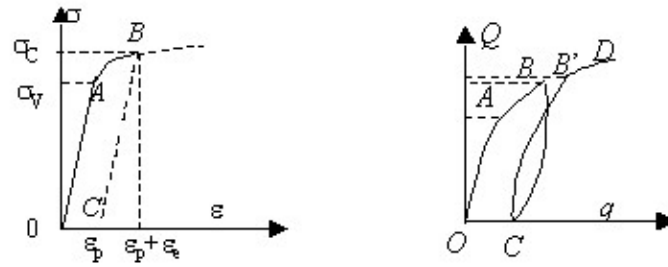


FIG. 4.1 – Seuil de plasticité

plus grande valeur de la charge antérieure. Ainsi, sur la figure 4.1 représentant la courbe de charge (force Q , déplacement q), le seuil de plasticité à la première charge OB correspond au point A . A la seconde charge CB' , le seuil de plasticité correspond au point B' . L'absence de coïncidence rigoureuse entre B et B' et la boucle décharge-recharge BCB' sont la conséquence d'un effet de frottement interne. Pour des chargement infiniment lents, les frottements internes n'interviennent pas, les points B et B' et les trajets BC et CB' sont confondus, la plasticité est alors indépendante du temps, absence d'effet visqueux. Dans ce cas, le nouveau seuil de plasticité au point B' confondu avec B est bien égal à la valeur de la plus grande charge atteinte lors de la charge précédente, point B . C'est cette évidence expérimentale qui justifie la notion de seuil d'écoulement.

Grâce à leur ductilité, les matières plastifiables peuvent être moulées sous l'action de contraintes suffisantes et gardent ensuite leur forme sous des contraintes plus faibles. Tous les métaux non alliés et certains alliages présentent une phase de comportement plastique. La déformation plastique est utilisée dans les opérations de corroyage : forgeage, estampage, emboutissage, laminage, filage, pliage, ...

Les terres, l'argile et la plupart des pâtes sont plastifiables. Enfin, les corps réputés fragiles, bétons, roches, verres, ... soumis à pression hydrostatique suffisamment élevée cessent d'être fragiles et acquièrent un comportement plastique vis-à-vis des contraintes additionnelles.

4.1.2 Influence des déformations plastiques sur les propriétés mécaniques

Déformations plastiques modérées

Des déformations plastiques modérées n'entraînent pas de changement des modules d'élasticité dans les corps compacts. Leurs trois effets essentiels sont :

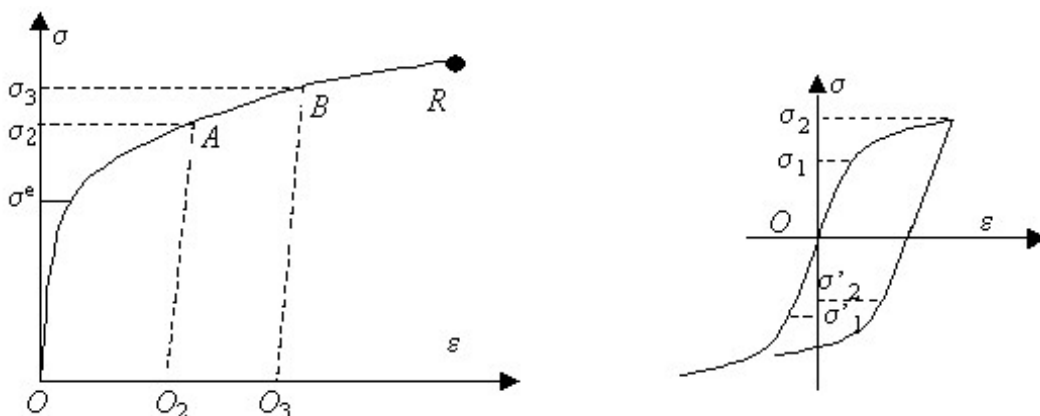


FIG. 4.2 – Durcissement, ductilité et effet Bauschinger

– Le durcissement

Élévation du seuil de plasticité pour des contraintes de même nature et de même signe que celles qui ont produit l'écoulement plastique. La courbe de charge (sans décharge) $\sigma = f(\epsilon)$

est une fonction non décroissante de ε traduisant le durcissement du matériau *écrouissage* ou work-hardening : $\frac{d\sigma}{d\varepsilon} > 0$.

– *La réduction de la ductilité*

C'est la diminution de l'allongement possible avant rupture. La position du point de rupture R n'est quasiment pas modifiée par les décharges AO_2 , BO_3 , ... Ces décharges ont pour effet de déplacer l'origine des déformations de O en O_2 puis O_3 , ... réduisant progressivement l'allongement restant à parcourir jusqu'à la rupture. On observe généralement une diminution progressive du durcissement au fur et à mesure que l'on se rapproche du point de rupture R . La courbe de charge $\sigma = f(\varepsilon)$ est une fonction croissante de ε : $\frac{d\sigma}{d\varepsilon} > 0$, mais cette dérivée décroît : $\frac{d^2\sigma}{d\varepsilon^2} < 0$.

– *L'effet Bauschinger*

On observe généralement une diminution (en valeur absolue) du seuil de plasticité pour des contraintes de même nature mais de signes opposés à celles qui ont produit la déformation plastique, soit $|\sigma'_2| < |\sigma'_1|$. Dans tous les cas on observe une réduction de l'amplitude du domaine élastique : $|\sigma'_2| - |\sigma'_1| < \sigma_2 - \sigma_1$. Dans le cas des métaux pour lesquels $\sigma'_1 = -\sigma_1$ on a $\sigma'_2 > -\sigma_2$.

Déformations plastiques importantes

Des déformations plastiques importantes ont pour effet d'étirer et d'orienter les grains cristallins ou les chaînes de polymères. Sous l'effet du laminage intense, le matériau initialement isotrope devient anisotrope entraînant le changement de ses modules d'élasticité. Les métaux fortement plastifiés prennent une *texture*, les roches une *schistosité*.

Les modifications produites par les déformations plastiques peuvent dans tous les cas être rattachées à un changement de structure à une certaine échelle. Dans certains cas ces changements sont définitifs, mais il arrive assez souvent que le corps ait tendance à reprendre très lentement sa structure initiale. Dans le cas des métaux ce phénomène est appelé *restauration* : après décharge d'une éprouvette, plus on attend pour la recharger plus l'écrouissage s'estompe car le durcissement disparaît par annihilation lente des dislocations.

4.1.3 Le comportement plastique pur

Dans la pratique la vitesse de déformation est suffisamment lente pour que l'on puisse négliger les effets de frottement interne : absence de déformation différée ou de recouvrance retardée. La plasticité *pure* est indépendante du temps.

L'élasto-plasticité parfaite

Elle correspond au cas idéal où le seuil d'écoulement est une constante matérielle indépendante de la valeur de la déformation plastique atteinte. L'*écrouissage* ou *durcissement* est nul. Le comportement plastique parfait est schématisé par le modèle d'un patin idéal à frottement sec (cf. Fig 4.3) dont le seuil de glissement correspond au seuil d'écoulement σ_e indépendant de ε_p . Au delà du seuil, quand $\sigma \geq \sigma_e$ le patin n'oppose aucune résistance additionnelle au glissement. Ce modèle ne permet pas de définir la déformation plastique ε_p au delà du seuil puisqu'il ne comporte aucun mécanisme de contention de la déformation plastique, il est par contre très utile pour représenter la notion de *seuil d'écoulement plastique libre* (non contenu) le *Yield point*. L'élasticité est représentée par le ressort de raideur E monté en série. Tant que la contrainte $\sigma < \sigma_e$, le patin est bloqué, seul le ressort travaille et la relation $\sigma = f(\varepsilon)$ s'écrit $\sigma = E\varepsilon = E\varepsilon_e$. La déformation totale est d'origine purement élastique jusqu'au point A . Lorsque l'on cherche à augmenter la contrainte σ appliquée au delà de σ_e , le patin se met à glisser sans opposer de résistance, le matériau se plastifie, la contrainte reste plafonnée à la valeur σ_e et le matériau s'écoule plastiquement. Sa déformation totale $\varepsilon = \varepsilon_e + \varepsilon_p$ est alors la somme de la déformation élastique constante $\varepsilon_e = E\sigma_e$ et de la déformation plastique ε_p dont la loi d'évolution est indéterminée dans ce modèle élémentaire. Si l'on procède à une décharge à partir de l'état de déformation atteint au point B le patin se bloque instantanément arrêtant l'écoulement plastique de sorte que $\varepsilon_p = \varepsilon_p(B)$ tandis que le ressort se détend progressivement et la déformation élastique suit la loi $\varepsilon_e = E\sigma$ ($\sigma < \sigma_e$) de sorte qu'après décharge complète la déformation permanente est $\varepsilon_p = \varepsilon_p(B)$. Un nouveau chargement retendra le ressort jusqu'à revenir au point B au delà duquel l'écoulement

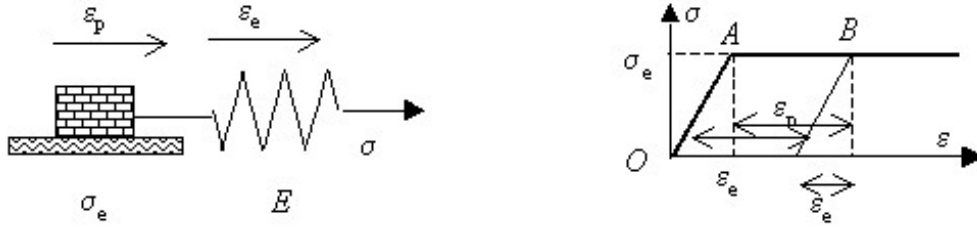


FIG. 4.3 – Plasticité parfaite : le modèle du patin à frottement sec

plastique reprendra à $\sigma = \sigma_e$ fixé. Le fait que le seuil d'écoulement soit indépendant de l'amplitude de la déformation plastique ε_p traduit bien l'absence d'écrouissage du matériau. En élasto-plasticité parfaite il n'existe pas de relation biunivoque entre σ et ε_p .

L'élasto-plasticité écrouissante

Le modèle le plus simple consiste à mettre en parallèle sur le patin un ressort de raideur K appelée *module d'écrouissage* qui correspond au mécanisme de création des contraintes internes nécessaires pour *contenir* l'écoulement plastique. Tant que la contrainte $\sigma < \sigma_e$, le patin est bloqué, seul le ressort

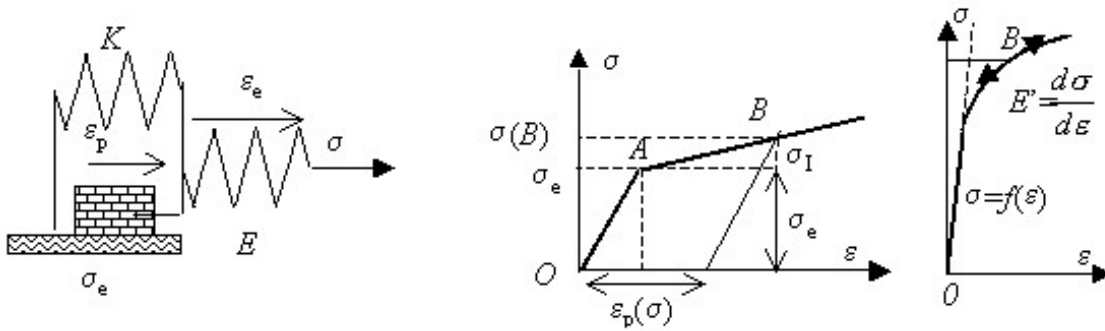


FIG. 4.4 – Plasticité écrouissante : le modèle du patin à frottement sec

E travaille et la relation $\sigma = f(\varepsilon)$ s'écrit $\sigma = E\varepsilon = E\varepsilon_e$. La déformation totale est d'origine purement élastique jusqu'au point A.

Lorsque l'on cherche à augmenter la contrainte σ appliquée au delà de σ_e , le patin se met à glisser opposant toujours la résistance σ_e , le matériau se plastifie mais le ressort K vient limiter l'écoulement possible de sorte que $\sigma = \sigma_e + K\varepsilon_p$ est la somme de la contrainte seuil du patin et de la contrainte $\sigma_I = K\varepsilon_p = \sigma - \sigma_e$ du ressort K . Le ressort élastique se déforme également selon la loi d'élasticité $\sigma = E\varepsilon_e$. La déformation totale $\varepsilon = \varepsilon_e + \varepsilon_p$ au point B est alors la somme de la déformation élastique $\varepsilon_e = \frac{\sigma}{E}$ et de la déformation plastique $\varepsilon_p = \frac{\sigma - \sigma_e}{K}$ de sorte que la réponse $\sigma = f(\varepsilon)$ s'écrit : $\varepsilon = (\frac{1}{E} + \frac{1}{K})\sigma - \frac{1}{K}\sigma_e$ soit $\varepsilon(B) - \varepsilon(A) = \frac{1}{E'}(\sigma(B) - \sigma(A))$ avec $\frac{1}{E'} = \frac{1}{E} + \frac{1}{K}$. E' pente du segment AB est appelé *module tangent*. Comme $E \gg K$, $E' \simeq K$. Ce modèle simple met en évidence le caractère *incrémental* des lois de la plasticité.

De manière plus générale, il y aura une relation biunivoque $\sigma = f(\varepsilon)$ dont la linéarisation locale au voisinage d'un point B de la zone plastique conduit immédiatement à la définition du module tangent $E'(\sigma) = \frac{d\sigma}{d\varepsilon}$ d'où son appellation et à l'écriture incrémentale $d\sigma = K d\varepsilon_p$ de la loi de plasticité, le module tangent $E'(\sigma)$ et le module d'écrouissage $K(\sigma)$ étant tout deux des fonctions décroissantes de la contrainte σ rendant compte de la diminution progressive du durcissement lorsque la plastification.

Si l'on procède à une décharge à partir de l'état de déformation atteint au point B le patin se bloque instantanément arrêtant l'écoulement plastique de sorte que $\varepsilon_p = \varepsilon_p(B)$ tandis que le ressort se détend progressivement et la déformation élastique suit la loi $\varepsilon_e = E\sigma$ ($\sigma < \sigma(B)$). Après décharge complète la déformation permanente est $\varepsilon_p = \varepsilon_p(B)$. Mais le ressort K qui supportait la contrainte $\sigma_I = K\varepsilon_p(B)$ reste tendu par suite du blocage du patin. Il exerce donc sur le patin une contrainte

$-\sigma_I$. C'est grâce à l'existence de cette contrainte *interne* induite par la plastification que l'écoulement plastique peut rester *confiné*. La plastification *écrouissante* s'accompagne toujours de la création de *contraintes internes de confinement*. A l'échelle microscopique tous les grains ne se plastifient pas en même temps et l'écoulement des grains qui se plastifient est contenu par les déformations élastiques des grains non plastifiés, ces déformations étant à l'origine des contraintes internes. Cependant, au cours de l'écrouissage, le nombre de grains en régime élastique diminue tandis que le nombre de grains passant en écoulement plastique augmente. Il existe donc un point au delà duquel l'écoulement plastique ne peut plus être contenu, et la ruine intervient alors inexorablement.

Ce simple modèle met également en évidence une deuxième caractéristique fondamentale des lois de plasticité, son caractère *non univoque* :

- Si au point B on augmente la contrainte appliquée σ , la plastification se poursuit selon la loi $\sigma = f(\varepsilon)$ définie de manière incrémentale par $K(\sigma) = \frac{d\sigma}{d\varepsilon_p}$.
- Si au contraire on la diminue, on rentre à nouveau en régime élastique et la décharge $\sigma = f(\varepsilon)$ s'identifie simplement à la loi de l'élasticité.

Chaque point de la courbe de charge $\sigma = f(\varepsilon)$ doit être considéré comme un *point de bifurcation* possible ce qui revient à dire que la courbe $\sigma = f(\varepsilon)$ est la limite du domaine de comportement élastique du matériau pour la sollicitation considérée.

L'effet Bauschinger

Ce modèle simple permet également de rendre compte schématiquement de l'effet Bauschinger.

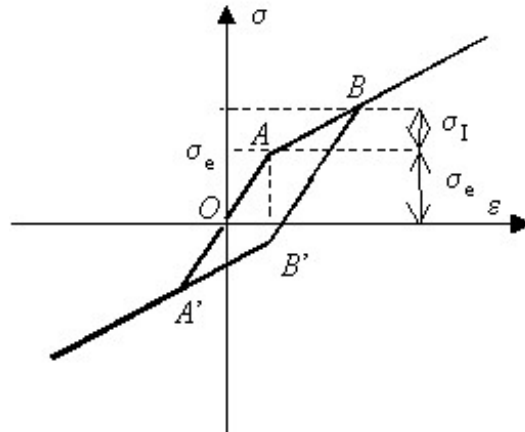


FIG. 4.5 – Effet Bauschinger : le modèle du patin à frottement sec

Partant de l'état de repos, la contrainte σ appliquée peut varier entre $-\sigma_e$ et σ_e avant que le patin ne se mette en mouvement. Le domaine élastique AA' initial (déformation purement élastique du ressort E sans glissement du patin plastique $\varepsilon_p = 0$) est défini par $-\sigma_e < \sigma < \sigma_e$. Appliquons maintenant une charge $\sigma > \sigma_e$ de sorte que le patin glisse puis se bloque à la nouvelle position d'équilibre B . Le ressort K est alors tendu par la contrainte interne $\sigma_I = K\varepsilon_p$ et le patin supporte la charge $\sigma - \sigma_I$ qui doit en valeur absolue rester inférieure à σ_e afin que le patin reste bloqué. Le domaine élastique BB' après plastification ε_p (déformation purement élastique du ressort E sans glissement du patin plastique $\varepsilon_p = Cte$) est donc défini par $\sigma_I - \sigma_e < \sigma < \sigma_I + \sigma_e$. Il s'est bien agrandi du côté de la contrainte de plastification initiale et réduit pour la contrainte de signe opposé. Dans ce modèle simple, le domaine élastique garde une amplitude constante $2\sigma_e$, mais il se translate de σ_I , écrouissage, réduisant la ductilité en se rapprochant du point de rupture.

4.1.4 Instabilité plastique et écoulement libre

La figure 4.6 représente la courbe de charge typique $F = f(u)$ d'un matériau ductile sollicité en traction uniaxiale, essai classique dans lequel F est la force appliquée à l'éprouvette (longueur initiale l_0 , aire de section droite initiale S_0) et u l'allongement résultant mesuré par le déplacement de la

traverse mobile de la machine d'essai). Moyennant une affinité de coefficient S_0 selon l'axe des forces et l_0 selon celui des déplacements, cette courbe représente également la relation $\sigma_n = f(\varepsilon_n)$ entre déformation et contrainte nominales. Schématiquement elle se décompose en trois domaines :

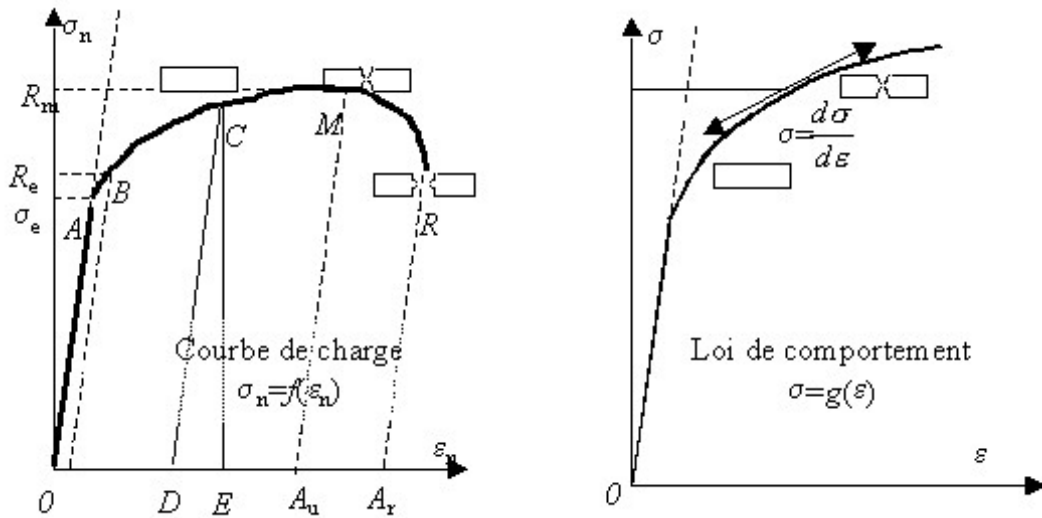


FIG. 4.6 – Instabilité plastique : courbes de charge nominale et vraie

– Un domaine *élastique*

OB caractérisé par une très forte pente (module d'Young E) correspondant à une déformation élastique maximale $\varepsilon \sim 10^{-3}$. La fin du domaine élastique est caractérisée par la limite élastique conventionnelle R_e (point B) correspondant à un allongement plastique permanent résiduel ε^P de 0,2%. La limite élastique vraie σ_e pour laquelle le premier cristal se plastifie (point A), non mesurable, est portée ici pour mémoire.

– Un domaine d'*écoulement plastique contenu*

BM caractérisé par l'allongement plastique uniformément réparti A_u et la résistance ultime à la traction R_m . La déformation plastique reste homogène sur le corps de l'éprouvette. Tous les tronçons de l'éprouvette se déforment de la même manière et la réduction d'aire de section droite qui en résulte est la même quelque soit la section droite considérée. C'est le domaine de plasticité utilisable pour les opérations de formage et d'emboutissage. Les déformations atteignent quelques dizaines de % et il faut utiliser la contrainte vraie telle que $F = \sigma_n S_0 = \sigma S$ et la déformation vraie $\varepsilon = \ln(1 + \varepsilon_n)$ pour représenter la loi de comportement $\varepsilon = g(\sigma)$ qui ne se confond plus avec la courbe de charge $\sigma_n = f(\varepsilon_n)$.

– Un domaine d'*instabilité plastique*

Au delà, domaine MR , la courbe de charge présente une pente négative, traduisant une instabilité mécanique plastique conduisant *rapidement* à la rupture (point R) caractérisée par l'allongement à rupture A_r encore appelé ductilité en traction. Plus A_r est grand et plus le matériau est ductile et apte à l'utilisation pour les opérations de formage.

L'écoulement plastique libre

Au point M une section particulière de l'éprouvette traversée par un défaut toujours présent dans les matériaux réels se déforme plus rapidement que les autres. Son aire devient plus petite, la contrainte σ augmente et la déformation plastique se localise au voisinage de cette section : c'est la *striction*. Le matériau a atteint sa limite de résistance. La plastification n'évolue plus de manière homogène le long de l'éprouvette, l'*écoulement plastique* n'est plus *contenu* dans la zone de striction tandis que la déformation s'arrête dans le reste de l'éprouvette. L'instabilité plastique se produit lorsque $\frac{d\sigma_n}{d\varepsilon_n} = 0$ et correspond au maximum $dF = 0$ de la courbe de charge. L'écoulement plastique devenu libre dans la zone de striction entraîne un allongement rapide de l'éprouvette et une diminution de la force imposée par la machine d'essai dont la vitesse d'allongement est limitée.

Le seuil d'instabilité plastique

En terme de loi de comportement le seuil d'instabilité $dF = 0$ est tel que $\frac{d\sigma}{\sigma} = -\frac{dS}{S}$. L'expérience montre que, si la déformation plastique est suffisamment grande, la plastification des matériaux s'effectue à *volume constant* ce qui permet de relier les variations de S à celle de l par la relation $\frac{dS}{S} = -\frac{dl}{l} = -d\varepsilon$. L'instabilité plastique correspond donc au point de la *loi de comportement* tel que $\sigma = \frac{d\sigma}{d\varepsilon}$ au delà duquel le *durcissement* du matériau n'est plus suffisant pour accommoder l'augmentation de contrainte appliquée. La condition de déformation à volume constant permet également de préciser la manière dont la loi de comportement $\varepsilon = g(\sigma)$ se déduit de la courbe de charge $\sigma_n = f(\varepsilon_n)$ au travers des transformations : $\varepsilon = \text{Ln}(1 + \varepsilon_n)$ et $\sigma = \sigma_n(1 + \varepsilon_n)$.

4.1.5 La striction stable

Dans certains polymères la courbe de charge $Q = f(q)$ présente un maximum au delà duquel, il n'y a plus durcissement mais palier plastique.

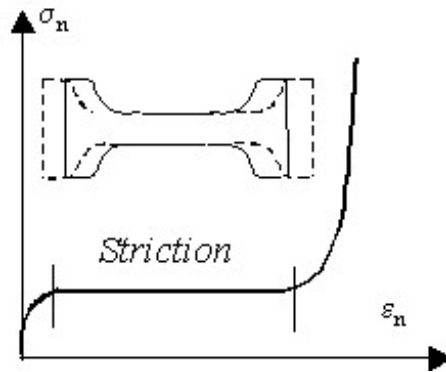


FIG. 4.7 – Striction stable des polymères

Les polymères, comme le polyéthylène présentent une striction *stable* qui ne conduit pas à la rupture. $\frac{d\sigma_n}{d\varepsilon_n}$ s'annule à assez faible contrainte et la striction commence. Toutefois le col ne devient *jamais instable*, il s'allonge de manière importante car pour ce matériaux l'écroutissage à forte contrainte est considérable accommodant l'augmentation de contrainte dû à la réduction de section de la zone de striction. Ce comportement étrange résulte de l'alignement des chaînes polymériques dans le col le long de la direction d'étirement. Les polymères étirés (complètement strictionnés) sont beaucoup plus résistants que les polymères non étirés.

4.2 Frontière élastique et frontière d'écoulement

La sollicitation de traction utilisée jusqu'ici pour la caractérisation du comportement plastique est fonction d'un seul paramètre de charge, la force de traction Q à laquelle est associé le déplacement q . Généralisons les notions de limite élastique et de limite d'écoulement plastique au cas des sollicitations complexes caractérisées par l'état de contrainte $\bar{\sigma}$.

4.2.1 La frontière élastique

Partant de l'état de repos $\bar{\sigma} = 0$ on cherche à déterminer l'ensemble de tous les états de contraintes $\bar{\sigma} \neq 0$ faisant apparaître une déformation permanente. Dans l'espace des contraintes cet ensemble définit une surface d'équation $f(\bar{\sigma}) = 0$ que l'on nomme *frontière élastique*. Cette surface également appelée *surface de charge* est indépendante du trajet de chargement et de l'horaire suivis pour l'atteindre puisque $\bar{\sigma} = f(\bar{\varepsilon})$ est biunivoque en régime élastique. En général, l'*écrouissage* du matériau *modifie la frontière élastique*. Lorsqu'elle n'est pas modifiée par l'apparition des déformations plastiques, le matériau est dit *plastique parfait*.

Lorsque le point de charge atteint la *surface de charge* avec une *vitesse dirigée vers l'extérieur*, il ne peut la franchir mais l'*entraîne* avec lui. Cette translation s'accompagne également d'une déformation de la surface de charge.

Par contre, dès que la vitesse de charge est *dirigée vers l'intérieur* le point de charge quitte la *surface de charge* pour rentrer dans le domaine élastique, la déformation plastique s'arrête et la surface de charge se fige.

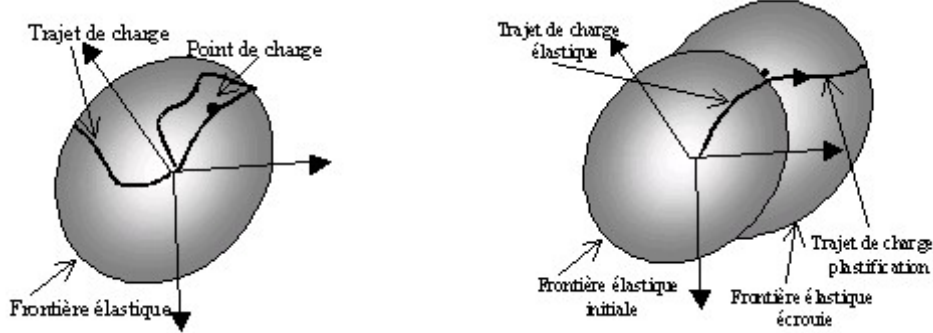


FIG. 4.8 – Domaine élastique, surface de charge et écouissage

Pour illustrer ce comportement reprenons le modèle simple du patin à frottement sec (Cf. Fig 4.9) soumis cette fois à deux chargements X et Y , les deux ressorts de raideurs k_X et k_Y symbolisant le comportement *plastique écouissant* et les deux ressorts de raideurs E_X et E_Y symbolisant le comportement *élastique*. Le seuil de résistance au glissement S du patin étant supposé indépendant de la direction de glissement le patin glissera dans la direction de la résultante des efforts qui lui sont appliqués lorsque l'amplitude de cette résultante atteindra le seuil S et ce, quelle que soit la direction de cette résultante. Partant de l'état initial où les ressorts de contention sont au repos ($X_0 = Y_0 = 0$) l'action des efforts X et Y se traduit simplement par des déformations élastiques dans les ressorts E_X et E_Y tant que le module $\sqrt{X^2 + Y^2}$ de la résultante reste inférieur au seuil de glissement S . La limite élastique sera atteinte lorsque $\sqrt{X^2 + Y^2} = S$. La *frontière élastique initiale*, cercle de rayon S centré sur l'origine O , a pour équation : $f(X, Y) = X^2 + Y^2 - S^2 = 0$ Pour un trajet de

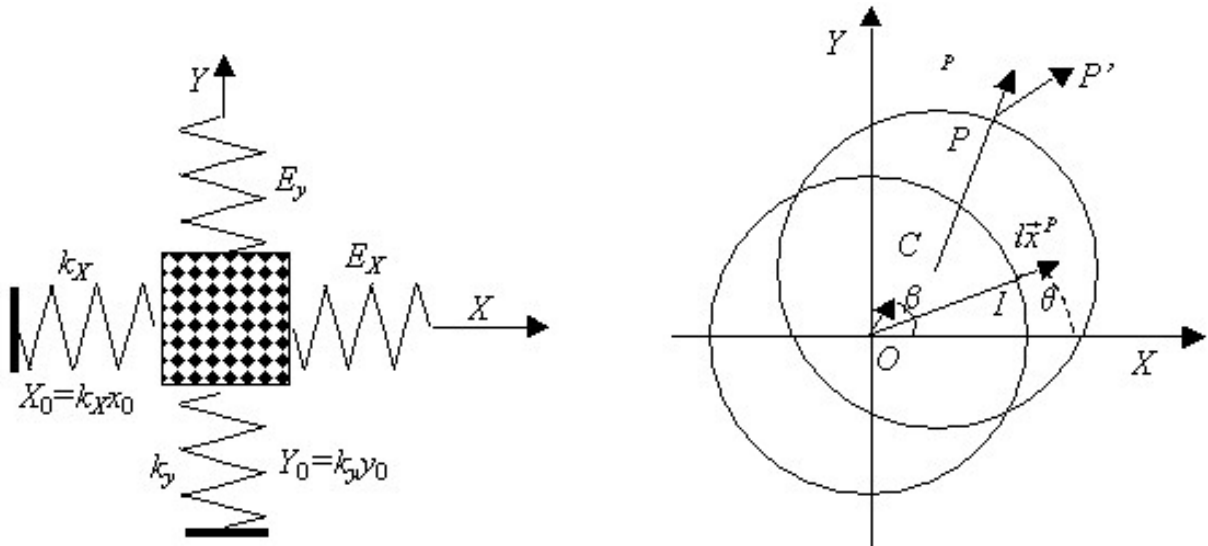


FIG. 4.9 – Modèle du patin à frottement sec

charge radial aboutissant au point I de la frontière élastique initiale la force appliquée $\vec{F}(X, Y) = OI$ fait l'angle θ avec l'axe OX . Un incrément $d\vec{F}$ de la force induit un glissement du patin plastique dx^P dans la direction \vec{F} , une force interne $d\vec{F}_0(dX_0, dY_0)$ avec $dX_0 = k_x dx_0$ et $dY_0 = k_y dy_0$ dans les ressorts de contention et le centre O du domaine élastique se déplace dans la direction β telle $\frac{dY_0}{dX_0} = \tan \beta = \frac{k_y}{k_x} \frac{dy_0}{dx_0} = \frac{k_y}{k_x} \tan \theta$. Si l'écouissage est *isotrope* $k_x = k_y$, $\beta = \theta$ et le centre du domaine

élastique se déplace dans la direction OI de l'effort appliqué. Une décharge, diminution de \vec{F} , provoque l'arrêt du glissement mais les ressorts de contention plastique restent soumis à l'effort interne $d\vec{F}_0$.

Partant d'un état écroui (C centre du domaine élastique) sans effort externe appliqué mais où les ressorts de contention sont tendu ($X_0 = Y_0 \neq 0$), l'action d'un effort se traduit simplement par des déformations élastiques dans les ressorts E_X et E_Y tant que le module $\sqrt{(X - X_0)^2 + (Y - Y_0)^2}$ de la résultante appliquée au patin reste inférieur au seuil de glissement S . La *nouvelle limite élastique* sera atteinte lorsque $\sqrt{(X - X_0)^2 + (Y - Y_0)^2} = S$. La frontière élastique écrouie, cercle de rayon S centré sur l'origine $C(X_0, Y_0)$, a pour équation : $f(X, Y) = (X - X_0)^2 + (Y - Y_0)^2 - S^2 = 0$. A seuil de glissement S constant la frontière élastique ne se déforme pas, sa translation traduit l'*écrouissage* et l'*effet Bauschinger*.

Effectuons maintenant le trajet de charge CP qui amène le point de charge sur la frontière élastique écrouie au point P où la résultante des efforts appliqués au patin est $\vec{F}(X - X_0, Y - Y_0)$. Au point P appliquons alors un incrément de charge $\delta\vec{F}(d_X, d_Y) = PP'$ dans une direction PP' différente de CP . En vertu de la propriété de la loi de glissement, l'accroissement de déformation plastique δx^P s'effectuera dans la direction de la *résultante actuelle*, c'est à dire CP et non dans celle de l'incrément PP' . Par contre son *amplitude* dépendra à la fois de l'*amplitude* et de la *direction* de l'incrément de charge. Pour un matériau *isotrope* la déformation *élastique instantanée* crée par l'incrément de charge s'effectue elle dans la direction PP' de cet incrément.

Cette propriété se vérifie facilement avec un fil écrouissable étiré au delà du seuil de plasticité. La force de traction F ayant conduit à l'allongement plastique actuel étant maintenue constante, appliquons un petit couple de torsion $d\mathcal{C}$. La réponse élastique instantanée est une légère torsion qui s'annule avec le retrait du couple $d\mathcal{C}$. Par contre $d\mathcal{C}$ génère également un incrément de déformation plastique sous la forme d'un petit étirement supplémentaire du fil et non d'une petite torsion.

Ce modèle met en évidence la différence fondamentale entre les déformations élastique et plastique : *l'incrément de déformation élastique suit la direction de l'incrément de charge, tandis que l'incrément de déformation plastique suit la direction de la charge appliquée.*

4.2.2 La frontière d'écoulement

Comme le montre l'essai de traction tout matériau admet une limite de résistance au delà de laquelle la déformation plastique ne peut plus être contenue. Au delà de cette limite la structure évolue rapidement vers la rupture. D'une manière générale la frontière d'écoulement sera la surface enveloppe $F(\vec{\sigma}) = 0$ de toutes les frontières élastiques ayant atteint le seuil d'écoulement plastique libre, elle définira la limite de résistance du matériau comme fonction de la sollicitation imposée, c'est le *critère d'écoulement*.

Dans une structure l'état de contrainte créée par les efforts extérieurs appliqués n'est en général pas homogène et varie d'un point à un autre. La limite élastique n'est pas atteinte simultanément en tous points et les éléments macroscopiques de structure n'ayant pas encore atteint leur limite d'écoulement plastique libre contiennent les éléments l'ayant atteint jusqu'au moment où toute la structure s'écoule plastiquement librement. Ainsi, même si le matériau constitutif de la structure est un matériau à comportement plastique parfait, ce qui revient à dire que pour un volume élémentaire en état de contrainte homogène la frontière élastique initiale se confond avec la frontière d'écoulement, la réponse globale de la structure en terme de chargement présente habituellement un écrouissage et, en terme de paramètres de chargement Q_1, Q_2, \dots la surface de charge se distingue de la surface d'écoulement. Partant de l'origine imposons au point de charge P un trajet de charge qui s'en éloigne. La frontière élastique initiale est atteinte en P_0 . A partir de cet instant la plastification commence et le point P , bloqué sur la frontière, suit le trajet P_0P_1 entraînant avec lui la frontière élastique : c'est l'*écrouissage* à l'échelle de la structure. Si on procède à une décharge la déformation plastique cesse instantanément et la frontière élastique *écrouie* se fige tandis que P rebrousse chemin et rentre à l'intérieur de la frontière élastique écrouie : c'est la décharge élastique. Au point limite de chargement P_1 la limite de résistance est atteinte et l'écoulement plastique ne peut plus être contenu. En modifiant le trajet de charge le point limite de chargement P_1 décrit dans l'espace des paramètres de chargement Q_1, Q_2, \dots une surface lieu des points de chargement limite. Cette surface est appelé *surface de chargement limite*.

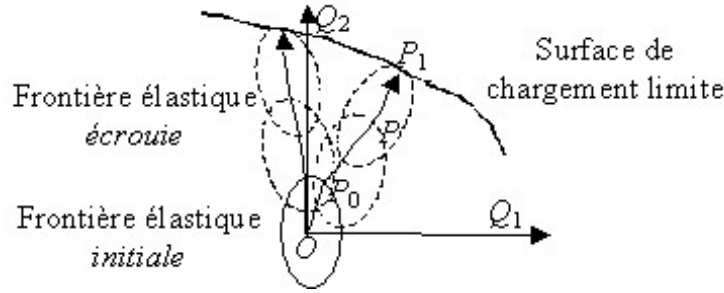


FIG. 4.10 – Frontières élastiques et surface de chargement limite

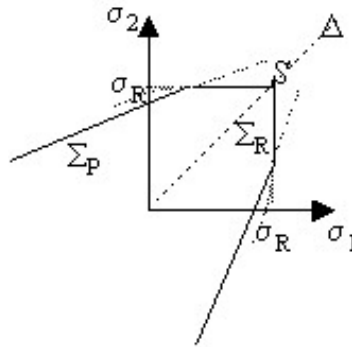
4.3 Critères de plasticité et d'écoulement

Pour un élément de matière en état de contrainte homogène la frontière élastique, initiale ou écrouie, $f(\bar{\sigma}) = 0$ représente le *critère de plasticité*. La frontière d'écoulement, surface enveloppe $F(\bar{\sigma}) = 0$ de toutes les frontières élastiques ayant atteint le seuil d'écoulement plastique libre après écrouissage, définit la limite de résistance du matériau comme fonction de la sollicitation homogène imposée : c'est le *critère d'écoulement* ou *limite de résistance*. Ces deux critères sont confondus pour les corps à comportement plastique parfait.

Pour un corps à comportement *plastique anisotrope* les fonctions f et F dépendent évidemment des axes utilisés, elle dépendront donc dans le cas général des trois invariants du tenseur $\bar{\sigma}$ définissant la sollicitation imposée et des trois angles d'Euler repérant les axes principaux de $\bar{\sigma}$ par rapport aux axes matériels d'anisotropie.

Pour un corps à comportement plastique isotrope tel que les conditions nécessaires au déclenchement ou à la poursuite de l'écoulement plastique soient indépendantes de la direction de sollicitation par rapport à la matière on peut toujours confondre les axes propres de $\bar{\sigma}$ et les axes matériels de sorte que les critères f et F sont obligatoirement des invariants de $\bar{\sigma}$. Les critères s'écriront donc soit en terme d'invariants $F(I_1, I_2, I_3) = 0$ soit en terme de contraintes principales $F(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = 0$. Dans l'espace $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ des contraintes principales le domaine $F < 0$ est appelé *domaine de résistance*. Ce n'est pas le domaine élastique mais celui des *déformations plastiques contenues*.

Comme toute déformation plastique conduit inexorablement à la rupture finale du matériau par traction ce domaine est limité par deux nappes distinctes (Cf. Fig 4.11) : l'une Σ_P correspondant à l'écoulement plastique et l'autre Σ_R à la rupture. La nappe Σ_R est tangente aux trois plans $\sigma_1 = \sigma_R, \sigma_2 = \sigma_R, \sigma_3 = \sigma_R$ au point S où elle rencontre l'axe des contraintes isotropes $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$, traction hydrostatique, ce qui nous ramène à la notion de contrainte de rupture σ_R d'un matériau en traction.

FIG. 4.11 – Allure probable des deux nappes en projection sur le plan σ_1, σ_2

Même dans le cas de grandes déformations plastiques la séparation se termine par une rup-

ture *fragile*, *clivage* sur la nappe Σ_R . Les causes de cet effet sont diverses : l'endommagement par développement de fissures microscopiques, l'écroutissage augmentant la résistance au glissement mais diminuant souvent la résistance au clivage, la viscosité agissant dans le même sens que l'écroutissage quand la déformation plastique s'accélère et la modification de l'état de contrainte induite par la modification de la forme extérieure du corps sous l'action des déformations plastiques.

Nous limiterons l'étude aux principaux critères d'écoulement plastique, surface Σ_P , mais il faudra garder en mémoire le fait que ces critères ne préjugent pas du mode de rupture final.

4.3.1 Effet d'une pression isotrope

Pour un corps réputé *homogène* et *sans vides* le domaine des déformations plastiques contenues s'étend indéfiniment du côté des *pressions* (contrainte négative) sur l'axe $\Delta(\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3)$. La plastification s'effectuant à volume constant (déformation isotrope nulle) une compression hydrostatique, quelle que soit son amplitude, ne produit ni rupture ni écoulement plastique comme l'ont démontrées les expériences de Bridgmann et Cook.

Cependant ce résultat est mis en défaut pour les corps présentant des vides ou de graves défaut d'homogénéité. Une pression hydrostatique peut alors induire des déformations plastiques importantes voire même la rupture. Ainsi :

- Les métaux frittés et le béton sec répondent à un critère fermé du côté des pressions avec une résistance à la traction faible (liée à la faible cohésion du matériau).
- Les textiles tissés présentent au contraire une très faible résistance à la compression (liée au flambement des fils) comparée à leur résistance en traction.



FIG. 4.12 – Critères fermés : matériaux hétérogènes et textiles

4.3.2 Symétries du domaine de résistance

Le critère F doit être symétrique en $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$. L'axe $\Delta(\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3)$ des contraintes isotropes est l'axe de symétrie ternaire de la frontière d'écoulement Σ_P ($F = 0$) et les plans $\sigma_1 = \sigma_2$, $\sigma_2 = \sigma_3$ et $\sigma_1 = \sigma_3$ plans de symétrie. La section de Σ_P par un plan perpendiculaire à Δ possède une symétrie ternaire. Pour déterminer complètement Σ_P il suffit de la déterminer dans un angle dièdre égal à $\frac{\pi}{3}$. Dans l'espace $O\sigma_1, O\sigma_2, O\sigma_3$ des contraintes principales, le vecteur \overrightarrow{OM} de composantes $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ qui décrit l'état de contrainte en un point du corps est assujéti à rester dans le domaine délimité par Σ_P . Il se décompose en un vecteur $\overrightarrow{OH}(\sigma_m, \sigma_m, \sigma_m)$ porté par Δ *axe des contraintes normales moyennes* σ_m et d'un vecteur perpendiculaire $\overrightarrow{HM}(\sigma_1 - \sigma_m, \sigma_2 - \sigma_m, \sigma_3 - \sigma_m)$ dans le plan perpendiculaire à Δ d'origine H .

Le vecteur \overrightarrow{OH} de module $\sqrt{3}\sigma_m = \frac{\sqrt{3}}{3}\text{Tr}(\overline{\sigma})$ caractérise le *sphérique* des contraintes.

Le vecteur \overrightarrow{HM} caractérise le *déviateur* de contraintes. σ_d étant la contrainte déviatorique moyenne et $J_2 = |(\sigma_1 - \sigma_m)(\sigma_2 - \sigma_m) + \sigma_1 - \sigma_m)(\sigma_3 - \sigma_m) + \sigma_2 - \sigma_m)(\sigma_3 - \sigma_m)|$ la valeur absolue du second invariant du *déviateur*, son module $|\overrightarrow{HM}| = \sqrt{\text{Tr}(\overline{\sigma}_D^2)} = \sqrt{2J_2} = \sqrt{3}\sigma_d = \sqrt{\frac{2}{3}}\sigma_I$, $\sigma_I = \frac{3}{\sqrt{2}}\sigma_d$ étant l'*intensité des contraintes*. Dans le référentiel $H\sigma_1, H\sigma_2, H\sigma_3$ perspectives des axes $O\sigma_1, O\sigma_2, O\sigma_3$ dans le plan perpendiculaire à Δ en H caractérisant le déviateur, le vecteur \overrightarrow{HM} a pour composantes $\sqrt{\frac{3}{2}}(\sigma_i - \sigma_m)$.

- En traction simple d'amplitude σ selon $O\sigma_1$:

$$3\sigma_m = \sigma \quad |\overrightarrow{HM}|^2 = \frac{2}{3}\sigma^2 \quad \text{soit} \quad \sigma = \sigma_I \quad (4.1)$$

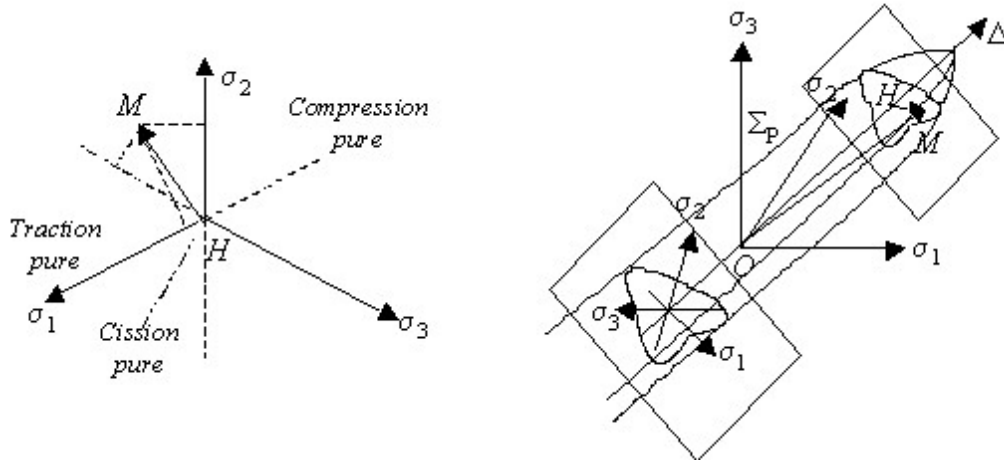


FIG. 4.13 – Symétries du domaine de résistance, plan du déviateur et espace des contraintes

Le vecteur \overrightarrow{HM} a pour composantes $\frac{2}{3}\sqrt{\frac{3}{2}}\sigma$, $-\frac{1}{3}\sqrt{\frac{3}{2}}\sigma$, $-\frac{1}{3}\sqrt{\frac{3}{2}}\sigma$ sur les perspectives $H\sigma_1, H\sigma_2, H\sigma_3$ des trois axes $O\sigma_1, O\sigma_2, O\sigma_3$. Dans le plan du déviateur, il est porté par la perspective $H\sigma_1$ de la partie positive de l'axe $O\sigma_1$.

L'état de compression simple d'amplitude $-\sigma$ sera donc le point symétrique par rapport à l'origine H sur le même axe.

- En cisaillement pur dans le plan σ_1, σ_2 caractérisé par $\sigma_1 = \tau$, $\sigma_2 = -\tau$ et $\sigma_3 = 0$:

$$\bar{\sigma} = \bar{\sigma}_D \quad \sigma_m = 0 \quad |\overrightarrow{HM}|^2 = 2\tau^2 \quad \text{soit} \quad \sigma_I = \sqrt{3}\tau \quad (4.2)$$

Le vecteur \overrightarrow{HM} a pour composantes $\sqrt{\frac{3}{2}}\tau$, $-\sqrt{\frac{3}{2}}\tau$, 0 sur les trois axes $H\sigma_1, H\sigma_2, H\sigma_3$. Dans le plan du déviateur, il est porté par la perpendiculaire à l'axe $H\sigma_3$.

4.3.3 Critère de Tresca et Courbe intrinsèque de Caquot

En 1870 Tresca, effectuant des expériences sur le plomb, admet que la déformation plastique se produit en un point lorsque sur une facette passant par ce point la cission (module du cisaillement) atteint une valeur caractéristique du matériau c'est à dire lorsque la *cission maximale* $\tau_M = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3)$ lorsque $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ atteint une valeur déterminée k , *résistance au cisaillement* du matériau. Ce critère est bien adapté au comportement des métaux purs et à certains alliages, un changement de signe des contraintes ne change pas la limite d'écoulement : $F(-\sigma_1, -\sigma_2, -\sigma_3) = F(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$.

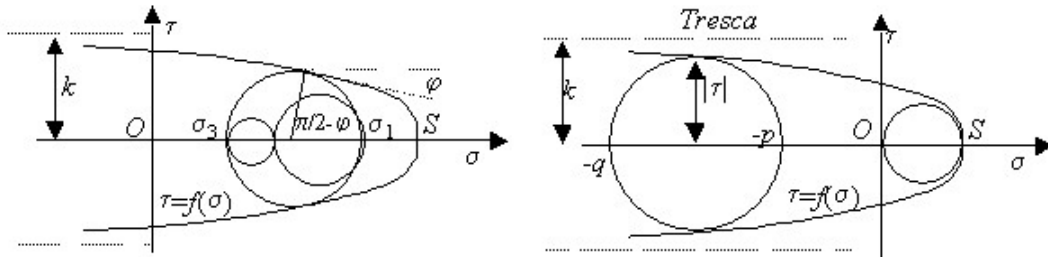


FIG. 4.14 – Critère de Tresca et courbe intrinsèque de Caquot

Pour les autres corps Mohr (1900), se basant sur l'idée que la déformation plastique s'opère par glissement, propose une généralisation du critère de Tresca sous la forme : $\tau = f(\sigma)$, τ cission et σ contrainte normale supportées par la facette de glissement. f est une fonction décroissante de σ (les $\sigma > 0$ sont des tractions) et la courbe limite $\tau = f(\sigma)$ du plan σ, τ dite courbe de *résistance intrinsèque* ou courbe *intrinsèque de Caquot* délimite le domaine de résistance du matériau.

Dans le plan σ, τ de la représentation de Mohr la condition $\tau = f(\sigma)$ sera réalisée pour deux facettes lorsque le plus grand des cercles de Mohr, ici de diamètre σ_3, σ_1 avec $\sigma_3 < \sigma_2 < \sigma_1$, deviendra

bitangent à la courbe intrinsèque. Les facettes de glissement qui contiennent la direction σ_2 , font alors un angle $\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}$ avec la direction de la facette soumise à la traction maximale. La condition de bitangence se réduit à une expression du type $g(\sigma_1, \sigma_3) = 0$ dans laquelle la contrainte principale σ_2 n'intervient pas. Afin que le cercle limite reste bitangent à la courbe intrinsèque σ_1 et σ_3 doivent varier dans le même sens et g vérifie : $\frac{\partial g}{\partial \sigma_1} \frac{\partial g}{\partial \sigma_3} < 0$. La détermination expérimentale de la courbe intrinsèque s'obtient comme enveloppe des cercles limites de l'expérience d'étreinte avec compression ($\sigma_1 = \sigma_2 = -q$, $\sigma_3 = -p$, $p > q$). On constate :

- Aux très grandes pressions q , pour tous les matériaux, la valeur de $|\tau| = \frac{p-q}{2}$ tend vers une limite finie, le critère tend vers celui de Tresca : deux droites parallèles à $O\sigma$. Le matériau aux grandes pressions q est capable de supporter de très grandes déformations plastiques sans rupture, même les roches les plus dures. L'application d'une pression hydrostatique préalable à un corps fragile déplace le centre du cercle limite vers la gauche sur l'axe $O\sigma$ expliquant les plissements sans fracture des terrains sédimentaires ou le filage du verre à froid.
- Au sommet S de la courbe intrinsèque il y a rupture avant déformation plastique avec une forte dispersion des valeurs de la contrainte de rupture : on est passé sur la surface Σ_R

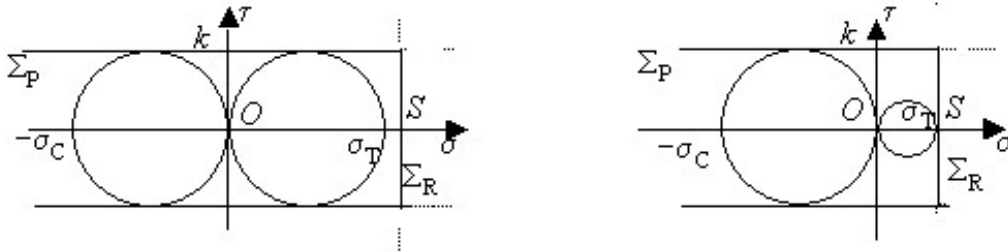


FIG. 4.15 – Ductilité et fragilité

- Les matériaux diffèrent seulement par la position S du sommet de la courbe intrinsèque par rapport à l'origine O des contraintes, c'est à dire par la valeur du rapport $\frac{1}{2} \frac{OS}{k}$. Ce rapport est grand pour les corps ductiles, le cercle limite tangente d'abord la surface Σ_P . Il est très petit pour les corps fragiles (béton, roches, céramiques, verres) et le cercle limite tangente d'abord Σ_R au voisinage de S . La ductilité se caractérise également par le rapport des limites σ_T à la traction simple et σ_C à la compression simple. Pour les corps très ductiles, ce rapport est égal à 1 car $\sigma_C = \sigma_T = 2k$. Pour les corps fragiles, il est très petit (de 1/10 à 1/100) car $\sigma_T = \sigma_R \ll \sigma_T = 2k$.

4.3.4 Critères de Von Misès et Coulomb

Dans le cas des terres denses où l'on observe des glissements la loi $\tau = f(\sigma)$ n'est que grossièrement respectée. Le critère de la courbe intrinsèque n'est donc pas rigoureux. De nombreux essais ont montré que pour tous les matériaux (métaux, terres, roches, bétons) la contrainte principale intermédiaire σ_2 joue un rôle. Si son influence reste limitée dans le cas des métaux où lorsque l'on fait varier σ_2 de σ_1 à σ_3 , à $\sigma_3 = Cte$ la valeur critique de σ_1 varie de 10%, elle est au contraire très importante dans le cas des roches pour lesquelles la résistance à l'étreinte ($\sigma_1 = \sigma_2 = -q$, $\sigma_3 = -p$, $p > q$) est double de la résistance à la compression simple ($\sigma_2 = 0$, $\sigma_1 = -q$, $\sigma_3 = -p$, $p > q$).

Pour prendre en compte la contrainte principale intermédiaire, il faut revenir à la définition du critère en terme d'invariants des contraintes $F(I_1, I_2, I_3) = 0$. Pour les corps très *ductiles* l'expérience montre que seul intervient le déviateur des contraintes $\bar{\sigma}_D = \bar{\sigma} - \sigma_m \bar{\delta}$ avec σ_m contrainte normale moyenne telle que $3\sigma_m = I_1$. On peut donc substituer aux invariants I_2 et I_3 de $\bar{\sigma}$ les invariants J_2 et J_3 correspondant de son déviateur $\bar{\sigma}_D$ puisque $J_1 = \text{Tr}(\bar{\sigma}_D) = 0$, $2J_2 = \text{Tr}(\bar{\sigma}_D^2) = \text{Tr}(\bar{\sigma}^2) - 3\sigma_m^2$ et $J_3 = \text{Det}(\bar{\sigma}_D)$. Le critère s'écrit alors : $F(J_2, J_3) = g(\sigma_m)$. La section droite de cette surface dans tout plan perpendiculaire à l'axe de symétrie ternaire $\Delta(\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3)$ de la surface Σ_P est limitée par la courbe d'équation $\phi(J_2, J_3) = g(\sigma_m) = Cte$. Aux fortes pressions la surface Σ_P se rapproche d'un cylindre de génératrices parallèles à Δ et la constante $g(\sigma_m)$ devient indépendante de σ_m (Cf. Fig. 4.13).

Critères de Von Misès et de Tresca

- Le critère de Von Misès $J_2 = k^2$ en est la forme la plus simple obtenue lorsque ϕ ne dépend ni de J_3 ni de σ_m . Comme $|\overrightarrow{HM}|^2 = 2J_2 = 2k^2$ c'est un *cylindre circulaire* d'axe Δ et de rayon $r = \sqrt{2}k$. D'après (4.2) la résistance au cisaillement τ est $\sigma_C = k$ et d'après (4.1) la résistance à la traction σ est $\sigma_T = k\sqrt{3}$.

- Le critère de Tresca qui s'écrit $\sigma_1 - \sigma_3 = 2k$ lorsque $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$, correspondant à un plan parallèle à Δ et à $O\sigma_2$ coupant l'axe $O\sigma_1$ à l'abscisse $2k$ et dont la trace sur le plan perpendiculaire à Δ est une droite parallèle à $H\sigma_2$. En faisant jouer les symétries le critère de Tresca $\text{Sup}|\sigma_i - \sigma_j| = 2k$ est un cylindre d'axe Δ ayant pour base, dans le plan perpendiculaire à Δ , un *hexagone régulier*.

D'après $\sigma_1 - \sigma_3 = 2k$ la résistance au cisaillement $\sigma_1 = \tau$, $\sigma_3 = -\tau$ est $\sigma_C = k$ et la résistance à la traction $\sigma_1 = \sigma$, $\sigma_3 = 0$ est $\sigma_T = 2k$.

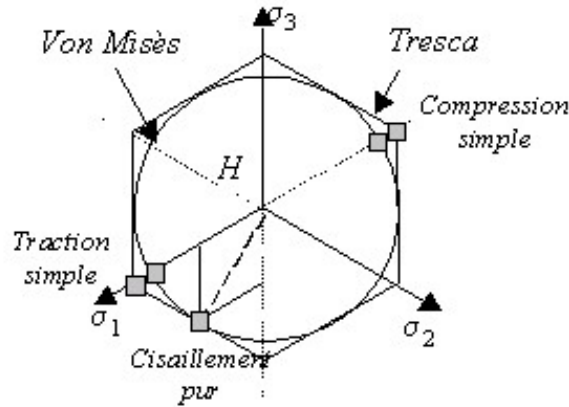


FIG. 4.16 – Critères de Von Misès et Tresca

- Ces deux critères sont voisins. En prenant comme référence la résistance en cission pure k , l'hexagone de Tresca est circonscrit au cercle de Von Misès car les deux figures sont tangentes aux points représentatifs du cisaillement pur. Par symétrie les résistances en traction et compression sont égales dans chacun des critères, mais, à résistances au cisaillement k égales, la résistance à la traction est $\sigma_T = k\sqrt{3}$ pour Von Misès et $\sigma_T = 2k$ pour le critère de Tresca. L'écart relatif maximal entre les deux critères donné par $\frac{k\sqrt{3}-2k}{2k} = 13\%$ intervient pour une sollicitation de traction pure. L'expérience donne pour les métaux des résultats compris entre les deux, en général plus proches de Von Misès. De ce fait il est fréquemment utilisé d'autant qu'il présente une régularité mathématique commode comparée à celui de Tresca.

Critères de Schleicher et de Coulomb

Pour faire intervenir la contrainte moyenne σ_m la généralisation la plus simple des critères précédents consiste à remplacer la constante k précédente par une fonction de σ_m : $J_2 = f(\sigma_m)$ généralisation du critère de Von Misès connue sous le nom de critère de Schleicher. Ce critère donne de bons résultats pour les roches en prenant $f(\sigma_m) = A|\sigma_m|^\alpha$ avec α un peu < 1 . La valeur $\alpha = 1$ correspond au critère de Coulomb définissant le frottement sec. La résistance au glissement τ augmente proportionnellement à la charge de compression moyenne σ_m , leur rapport constant $\mu = \text{tg}\varphi$ étant le *coefficient de frottement*. La *cohésion* σ_C est la résistance ultime à la traction généralement faible.

4.4 Les équations de la plasticité

Rappelons la différence fondamentale entre les déformations élastique et plastique : *l'incrément de déformation élastique* $d\overline{\varepsilon}^E$ suit la direction de *l'incrément de contrainte* $d\overline{\sigma}$ qui le *provoque*, tandis que *l'incrément de déformation plastique* $d\overline{\varepsilon}^P$ dépend plus de *l'état de contrainte* $\overline{\sigma}$ qui le *rend possible*.

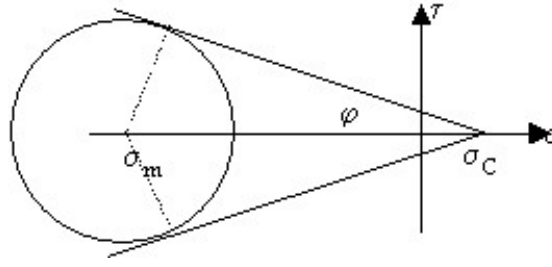


FIG. 4.17 – Critère de Coulomb

que de l'incrément de contrainte $d\bar{\sigma}$ qui le provoque.

En effectuant la partition de la déformation totale $\bar{\varepsilon} = \bar{\varepsilon}^E + \bar{\varepsilon}^P$ en déformation élastique et plastique, la déformation plastique $\bar{\varepsilon}^P$ dans un état donné est une *fonctionnelle* dépendant à la fois des contraintes $\bar{\sigma}$ de l'état considéré et de leur évolution au cours de tous les états précédents. En introduisant un temps conventionnel τ pour décrire cette *histoire*, t désignant l'état actuel, la relation $\bar{\varepsilon}^P$, $\bar{\sigma}$ s'écrit : $\bar{\varepsilon}^P(t) = \mathcal{F}[\bar{\sigma}(\tau), \bar{\sigma}(t)]$ avec $-\infty < \tau < t$. Il est clair qu'à une même valeur de déformation $\bar{\varepsilon}^P$ peut correspondre une infinité d'états de contrainte $\bar{\sigma}$. On ne peut écrire la loi de comportement plastique sous forme *finie* comme en élasticité car elle est de nature *incrémentale*.

Devant la difficulté de raisonner sur des fonctionnelles non linéaires on utilise l'hypothèse dite des *variables cachées* : la donnée de l'histoire $\bar{\sigma}(\tau)$ peut être remplacée par celles des valeurs *actuelles* $\alpha_k(t)$ d'un certain nombre de variables cachées dites *paramètres d'écrouissage* représentées (pour des raisons de simplicité) par le vecteur $\bar{\alpha}(t)$ fonctionnelle de $\bar{\sigma}(\tau)$ et dont la connaissance, jointe à celle de $\bar{\sigma}(t)$, détermine l'état du corps. En plasticité *classique*, indépendante du temps, les équations incrémentales s'écrivent :

$$\begin{aligned} d\bar{\varepsilon}^P &= \mathbf{Y}(\bar{\sigma}, \bar{\alpha}) d\bar{\sigma} & d\bar{\varepsilon}^P &= 0 \\ d\bar{\alpha} &= \mathbf{K}(\bar{\sigma}, \bar{\alpha}) d\bar{\sigma} & d\bar{\alpha} &= 0 \end{aligned} \quad (4.3)$$

en régime *plastique* en régime *élastique*

Pour résoudre un problème de plasticité, il faut donc connaître :

- La *fonction de charge* $f(\bar{\sigma}, \bar{\alpha}) = 0$ qui évolue au cours du chargement
- La *fonction d'écoulement* $\mathbf{Y}(\bar{\sigma}, \bar{\alpha})$ qui lie l'incrément de déformation plastique $d\bar{\varepsilon}^P$ à l'accroissement de chargement $d\bar{\sigma}$
- La loi d'écrouissage $\mathbf{K}(\bar{\sigma}, \bar{\alpha})$ qui lie l'évolution $d\bar{\alpha}$ du paramètre d'écrouissage à l'accroissement de chargement $d\bar{\sigma}$

La description de l'écoulement plastique est un problème distinct de celle de l'écrouissage. Il faut établir les lois d'évolution des paramètres d'écrouissage permettant de déterminer la déformation de la surface de charge et la loi d'écoulement plastique afin d'établir à chaque incrément de contrainte l'état de déformation plastique induit.

4.4.1 Les matériaux ductiles

Loi d'écoulement

Nous nous limiterons au cas des matériaux cristallins ductiles pour lesquels, au moins de manière approchée, l'expérience montre que l'écoulement plastique $d\bar{\varepsilon}^P$ s'effectue dans la direction du gradient $\frac{\partial f}{\partial \bar{\sigma}}$ de la surface de charge écrouie $f(\bar{\sigma}, \bar{\alpha}) = 0$. Le matériau suit une loi d'écoulement *associée* à la surface de charge et la *fonction d'écoulement* $\mathbf{Y}(\bar{\sigma}, \bar{\alpha})$ est entièrement déterminée par la connaissance de la surface de charge $f(\bar{\sigma}, \bar{\alpha}) = 0$. Au voisinage de la frontière élastique initiale la contention des grains plastifiés par leurs voisins non plastifiés limite leur déformation plastique à un ordre de grandeur égal à celui des déformations élastiques des grains non plastifiés. La déformation plastique s'accompagne nécessairement d'une variation de volume. Mais l'expérience montre que lorsque la

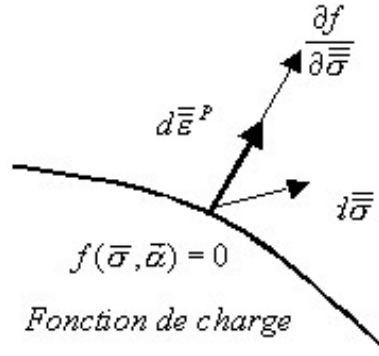


FIG. 4.18 – Loi d'écoulement plastique des matériaux ductiles

déformation plastique croît la variation permanente de volume (variation plastique) devient négligeable à l'échelle des déformations plastiques, la *plastification* s'effectue à *volume constant* et la fonction de charge ne dépend plus que du déviateur des contraintes $\bar{\sigma}_D$. La surface d'écoulement confondue avec la surface de charge $f(\bar{\sigma}_D, \bar{\alpha}) = 0$ est donc un cylindre de génératrices parallèles à la droite Δ d'équation $\bar{\sigma} = \sigma_m \bar{\delta}$ représentant les états de contrainte *isotrope* justifiant les critères de Von Misès et de Tresca (Cf. section 4.3). En régime *élastique* la variation relative de volume $\text{Tr}(\bar{\epsilon})$ est associée au coefficient de Poisson η par $E\text{Tr}(\bar{\epsilon}) = (1 - 2\eta)\text{Tr}(\bar{\sigma})$. Au delà de la limite élastique la plastification à volume constant (déformation élastique négligeable) $\text{Tr}(\bar{\epsilon}) \approx \text{Tr}(\bar{\epsilon}_D) = 0$ implique $\eta = \frac{1}{2}$, le coefficient de poisson passe progressivement de $\eta < \frac{1}{2}$ à $\eta = \frac{1}{2}$ lorsque la déformation plastique progresse.

Loi d'écrouissage isotrope

L'évolution de la surface de charge au cours de l'écoulement peut être complexe et, en plus du déplacement qui accompagne le point de charge, elle subit un changement de forme modifiant ainsi les seuils de plasticité pour tous les autres chargements. A partir d'une forme *initiale* $f(\bar{\sigma}) = 0$ le schéma d'évolution le plus simple est celui de l'*écrouissage isotrope*. Il se traduit par une simple dilatation homothétique de la surface de charge par rapport à l'origine. Un seul paramètre scalaire d'écrouissage α suffit à décrire cette évolution.

Sous ces restrictions, la seule donnée de la *fonction de charge* $f(\bar{\sigma}, \alpha) = 0$ permet de caractériser à la fois la fonction d'écoulement et la fonction d'écrouissage, conduisant à une forte simplification du problème.

Relation de Von Misès

Le critère de Von Misès, bien adapté aux métaux ductiles, s'écrit en présence d'écrouissage isotrope caractérisé par la fonction $\psi(\alpha)$:

$$f \equiv J_2 - \psi(\alpha) = \frac{1}{2} \text{Tr}(\bar{\sigma}_D^2) - \psi(\alpha) \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial f}{\partial \bar{\sigma}} = \frac{\partial J_2}{\partial \bar{\sigma}} = \bar{\sigma}_D$$

et la loi d'écoulement se réduit à une proportionnalité entre l'incrément de déformation plastique $d\bar{\epsilon}^P$ et le déviateur des contraintes $\bar{\sigma}_D$ qui le génère. Dans l'espace tridimensionnel des contraintes principales, la frontière d'écoulement est un cylindre circulaire dont l'axe est la droite $\Delta(\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3)$ et la vitesse de déformation plastique est représentée par un vecteur dirigé selon la normale extérieure au cylindre.

La *fonction de charge initiale* de Von Misès, en l'absence d'écrouissage $\psi(\alpha) = 0$, s'écrit plus commodément sous la forme :

$$\sigma_I - \sigma_e \quad \Rightarrow \quad f_e(\bar{\sigma}) = \sigma_I - \sigma_e = 0$$

avec σ_e limite d'élasticité *initiale* en traction simple et σ_I *intensité des contraintes* ou *contrainte équivalente au sens de Von Misès* :

$$\sigma_I = \sqrt{3J_2} = \sqrt{\frac{3}{2}\bar{\sigma}_D\bar{\sigma}_D} = \sqrt{\frac{3}{2}\text{Tr}(\bar{\sigma}_D^2)} = \frac{3}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{\text{Tr}(\bar{\sigma}_D^2)}{3}} = \frac{3}{\sqrt{2}}\sigma_d$$

qui s'assimile à la contrainte axiale dans le cas de la traction simple puisque :

$$\begin{aligned} \bar{\sigma} = \sigma \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} &\Rightarrow \bar{\sigma}_D = \frac{1}{3}\sigma \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \bar{\sigma}_D^2 = \frac{1}{9}\sigma^2 \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \sigma_d^2 = \frac{1}{3}\text{Tr}(\bar{\sigma}_D^2) = \frac{2}{9}\sigma^2 &\Rightarrow \sigma_d = \frac{\sqrt{2}}{3}\sigma \quad \text{et} \quad \sigma_I = \frac{3}{\sqrt{2}}\sigma_d = \sigma \end{aligned}$$

Un état de contrainte complexe $\bar{\sigma}$ peut être assimilé à celui d'une traction pure équivalente d'amplitude σ_I .

4.4.2 Chargement radial et déformation simple

Lorsque les charges externes varient de manière monotone proportionnellement à un seul paramètre cinématique t appelé *temps conventionnel* en tout point de la structure le tenseur $\bar{\sigma}$ varie proportionnellement à lui-même en gardant une orientation fixe correspondant à un trajet de chargement *radial* dans l'espace des contraintes. Son tenseur des directions $\bar{\pi}_\sigma$ ne dépend pas de t . Dans ce cas, le chargement est soit un chargement simple à un paramètre (traction uniaxiale, flexion d'une poutre dont la section droite présente un axe de symétrie, le moment fléchissant étant parallèle à cet axe, ...) soit à un chargement composite (torsion+traction,...) tel que les efforts appliqués dans les différents modes de sollicitation restent toujours proportionnels au cours du temps.

Si de plus le matériau est *isotrope* à *écrouissage isotrope*, les directions principales de $d\bar{\varepsilon}^P$ coïncident avec celles de $\bar{\sigma}_D$, qui sont aussi celles de $\bar{\sigma}$. Comme $\bar{\sigma}$ garde une direction constante au cours du chargement, il en va de même pour $d\bar{\varepsilon}^P$. Il est alors possible d'intégrer les équations incrémentales et d'obtenir des relations finies entre les variables $\bar{\sigma}$ et $\bar{\varepsilon}^P$ comme dans le cas élastique. C'est la simplification dite de la *déformation simple*.

À l'intensité des contraintes ou contrainte équivalente de Von Misès $\sigma_I = \sqrt{\frac{3}{2}\bar{\sigma}_D\bar{\sigma}_D}$ qui s'assimile à la contrainte axiale dans le cas d'une traction simple est associée la *déformation plastique cumulée* :

$$\varepsilon_I = \sqrt{\frac{2}{3}\bar{\varepsilon}_D\bar{\varepsilon}_D} = \sqrt{2}\sqrt{\frac{\text{Tr}(\bar{\varepsilon}_D^2)}{3}} = \sqrt{2}\varepsilon_d$$

En traction simple, la plastification s'effectuant à volume constant ($\eta = \frac{1}{2}$) :

$$\bar{\sigma} = \sigma \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \bar{\varepsilon}^P = \bar{\varepsilon}_D = \frac{\varepsilon}{2} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

et $\varepsilon_I = \varepsilon$ de la même manière que $\sigma_I = \sigma$. Hencky et Misès ont établi la relation :

$$\bar{\sigma}_D = \frac{2\sigma_I}{3\varepsilon_I}\bar{\varepsilon}_D = \frac{2\sigma_I}{3\varepsilon_I}(\bar{\varepsilon} - \bar{\varepsilon}_S) \quad (4.4)$$

qui lie les déviateurs de $\bar{\sigma}$ et de $\bar{\varepsilon}$.

Cette relation traduit simplement l'égalité $\bar{\pi}_\sigma = \bar{\pi}_\varepsilon$ des tenseurs des directions de $\bar{\sigma}$ et de $\bar{\varepsilon}$ sous la forme :

$$\bar{\pi}_\sigma = \frac{\bar{\sigma}_D}{\sigma_d} = \frac{\bar{\varepsilon}_D}{\varepsilon_d} = \bar{\pi}_\varepsilon \quad \text{puisque} \quad \varepsilon_I = \sqrt{2}\varepsilon_d \quad \text{et} \quad \sqrt{2}\sigma_I = 3\sigma_d$$

L'équation de plasticité se ramène donc à la détermination de la fonction φ telle que $\varepsilon_I = \varphi(\sigma_I)$.

En déformation simple cette fonction est universelle, valable pour tous les chargements radiaux monotones.

Loi de Hollomon

La courbe $\sigma_I = \phi(\varepsilon_I)$ obtenue *expérimentalement* par un essai de traction définit la fonction ϕ inverse de φ . Diverses formes analytiques ont été retenues pour son ajustement *en régime plastique*. La plus usitée, car bien adaptée à l'écrouissage des métaux, est la loi d'Hollomon :

$$\sigma_I = A\varepsilon_I^\chi \quad 0 \leq \chi < 1 \quad (4.5)$$

Selon la valeur de l'exposant d'écrouissage χ , cette loi permet de représenter une évolution continue

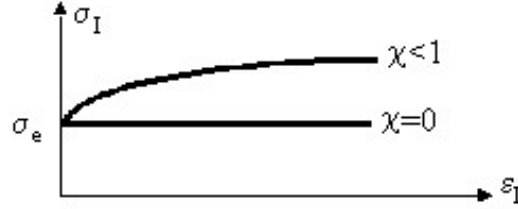


FIG. 4.19 – Loi d'Hollomon

de la fonction d'écrouissage entre la *plasticité parfaite* pour $\chi = 0$ et la *plasticité écrouissante* pour $\chi < 1$. En pratique, comme le montre le tableau ci-dessous, $\chi < 1$ traduisant la diminution progressive du durcissement lorsque la plastification progresse. Les problèmes d'élasto-plasticité en déformation

Métaux et Alliages	R^P (Mpa)	A (MPa)	χ
Acier doux recuit	210	500	0,28
Acier 0,6% C trempé revenu	520	1270	0,15
Acier allié laminé	630	100	0,14
Acier inoxydable recuit	590	1280	0,45
Cuivre recuit	60	320	0,54
Laiton α (70-30) recuit	80	900	0,49
Aluminium recuit	40	180	0,20
Al Cu Mg (2024)	310	700	0,16

TAB. 4.1 – Exposant d'écrouissage. R^P limite de résistance en traction

simple se ramènent à celui de la traction plastique simple d'une éprouvette équivalente soumise à la contrainte $\sigma_I = \sqrt{\frac{3}{2} \text{Tr}(\bar{\sigma}_D^2)}$ déduite de l'état de contrainte *actuel* et présentant une déformation plastique cumulée $\varepsilon_I = \sqrt{\frac{2}{3} \text{Tr}(\bar{\varepsilon}_D^2)}$ déduite de l'état de déformation plastique cumulée *actuelle* ce qui permet de donner un sens plus large à l'*exposant d'écrouissage* de la loi d'Hollomon défini en traction.

4.4.3 Loi de Hooke généralisée

L'écoulement plastique s'effectuant à volume constant, le tenseur des déformations plastiques cumulées $\bar{\varepsilon}^P$ s'identifie au *déviateur* du tenseur des déformations $\bar{\varepsilon}$. La relation de Hencky-Misès s'écrit $\bar{\sigma}_D = \frac{2\sigma_I}{3\varepsilon_I} \bar{\varepsilon}_D = \frac{2\sigma_I}{3\varepsilon_I} (\bar{\varepsilon} - \bar{\varepsilon}_S)$ et lie les déviateurs de $\bar{\sigma}$ et de $\bar{\varepsilon}$. En adjoignant la relation de compressibilité $\sigma_m = 3K\varepsilon_m$ ou $\bar{\sigma}_S = K \text{Tr}(\bar{\varepsilon}) \bar{\delta}$ liant les sphériques de $\bar{\sigma}$ et de $\bar{\varepsilon}$ et prenant en compte les variations de volume induites par la partie élastique des déformations la loi de Hooke se généralise facilement :

$$\bar{\sigma} = \bar{\sigma}_S + \bar{\sigma}_D = (K - \frac{2\sigma_I}{9\varepsilon_I}) \text{Tr}(\bar{\varepsilon}) \bar{\delta} + \frac{2\sigma_I}{3\varepsilon_I} \bar{\varepsilon} \quad (4.6)$$

En régime *élastique pur* la relation $\bar{\sigma}_D = 2G\bar{\varepsilon}_D$ conduit à $\frac{\sigma_d}{\varepsilon_d} = 2G$ et $\frac{\sigma_I}{\varepsilon_I} = 3G$ soit :

$$\bar{\sigma} = (K - \frac{2}{3}G) \text{Tr}(\bar{\varepsilon}) \bar{\delta} + 2G\bar{\varepsilon} \quad \text{ou} \quad \bar{\sigma} = (K - \frac{2}{9}[3G]) \text{Tr}(\bar{\varepsilon}) \bar{\delta} + \frac{2}{3}[3G]\bar{\varepsilon}$$

afin de conserver la même forme de loi en régime plastique et élasto-plastique.

Le travail élasto-plastique des forces internes ne dépend plus du chemin suivi :

$$W = W_{F=Cte} + W_{V=Cte} \quad W_{F=Cte} = 3 \int_0^{\varepsilon_m} \sigma_m d\varepsilon_m = \int_0^\theta \sigma_m d\theta \quad W_{V=Cte} = 3 \int_0^{\varepsilon_d} \sigma_d d\varepsilon_d = \int_0^{\varepsilon_I} \sigma_I d\varepsilon_I$$

$\theta = 3\varepsilon_m$ étant la dilatation cubique (variation relative de volume) et σ_I, ε_I les intensités de contrainte et de déformation vérifiant $\sigma_I \varepsilon_I = 3\sigma_d \varepsilon_d$

$$W(\theta, \sigma_I) \text{ n'est autre que le } \textit{potentiel des contraintes}$$

$$\sigma_I = \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_I} \quad \sigma_m = \frac{\partial W}{\partial \theta} \quad \bar{\sigma} = \frac{\partial W}{\partial \bar{\varepsilon}} \quad \bar{\sigma}_D = \frac{\partial W_{V=Cte}}{\partial \bar{\varepsilon}_D}$$

$W_{F=Cte}$ correspond au *changement de volume à forme constante* sous l'action de la contrainte normale isotrope moyenne σ_m . Il est de nature *purement élastique* la plastification s'effectuant à volume constant. Comme $\sigma_m = 3K\varepsilon_m = K\theta$: $W_{F=Cte} = \frac{1}{2}K\theta^2$.

$W_{V=Cte}$ correspond au *changement de forme à volume constant* sous l'action de la contrainte déviatorique σ_d . Il reste de nature *élasto-plastique* et se décompose en un terme élastique récupérable et un terme plastique : $W_{V=Cte} = W^E + W^P$.

Tant que la contrainte σ_d n'a pas atteint le seuil de résistance au cisaillement ce travail est de nature *purement élastique récupérable* $W_{V=Cte} = W^E$ et le changement de forme résultant *réversible*. Comme $\sigma_d = 2G\varepsilon_d$ et $\sigma_I = 3G\varepsilon_I$ le module de cisaillement G caractérisant la résistance au changement de forme : $W^E = 3G\varepsilon_d^2 = \frac{3}{2}\sigma_d\varepsilon_d = \frac{1}{2}\sigma_I\varepsilon_I = \frac{1}{6G}\sigma_I^2$.

Au delà, la plastification avec *changement de forme irréversible* intervient.

- Pour un matériau *plastique parfait* ce seuil est la constante $\sigma_I = \sigma_e$ et la capacité de stockage d'énergie élastique récupérable sous forme d'un changement de forme à volume constant du corps sature à $W^E = \frac{1}{6G}\sigma_e^2$.
- En présence d'écrouissage le seuil progresse avec la plastification augmentant la capacité de stockage d'énergie élastique récupérable de sorte que, par écrouissage, le travail élastique W^E continue à croître. Cependant, la raideur décroissant rapidement lorsque que la déformation irréversible progresse, le travail dépensé pour déformer le corps plastiquement devient très rapidement supérieur au travail élastique. Le travail *plastique dépensé* sous forme de chaleur et d'énergie élastique de contention, énergie bloquée non récupérable, s'écrit dans tous les cas :

$$W^P = \int_0^{\varepsilon_I} \sigma_I d\varepsilon_I - \frac{1}{6G}\sigma_I^2$$

On ne s'intéresse qu'au travail $W_{V=Cte}$ de changement de forme à volume constant, le seul qui intervienne au niveau de la courbe d'écrouissage $\sigma_I = \phi(\varepsilon_I)$. Ce travail étant indépendant du chemin suivi (Cf. Fig. 4.20) :

$$\begin{array}{ccc} W_{V=Cte} = W^E + W^P = \int_0^{\varepsilon_I} \sigma_I d\varepsilon_I & W^E = \frac{1}{6G}\sigma_I^2 & W^P = \int_0^{\varepsilon_I} \sigma_I d\varepsilon_I - \frac{1}{6G}\sigma_I^2 \\ \text{Surface OSM} & \text{Surface O'MM'O'} & \text{Surface OSMO'O} \end{array}$$

Le travail complémentaire $\widehat{W}_{V=Cte} = \sigma_I \varepsilon_I - W_{V=Cte}$ soit la surface $OSMO''O$:

$$\widehat{W}_{V=Cte} = \sigma_I \varepsilon_I - \int_0^{\varepsilon_I} \sigma_I d\varepsilon_I = \int_0^{\sigma_I} \varepsilon_I d\sigma_I \quad \varepsilon_I = \frac{\partial \widehat{W}_{V=Cte}}{\partial \sigma_I} \quad \bar{\varepsilon}_D = \frac{\partial \widehat{W}_{V=Cte}}{\partial \bar{\sigma}_D}$$

n'est autre que le *potentiel des déformations plastiques* (hors variation de volume).

Théorème de la décharge

La décharge partielle de M à N (Cf. Fig. 4.20) suit la loi de l'élasticité $\bar{\sigma} = (K - \frac{2}{3}G)\mathbf{Tr}(\bar{\varepsilon})\delta + 2G\bar{\varepsilon}$ soit en posant $\lambda = K - \frac{2}{3}G$ et $\theta = \mathbf{Tr}(\bar{\varepsilon})$:

$$\bar{\sigma}^N - \bar{\sigma}^M = \Lambda(\theta^N - \theta^M)\bar{\delta} + 2G(\bar{\varepsilon}^N - \bar{\varepsilon}^M)$$

• La décharge totale (point O' avec $\bar{\sigma}^{O'} = 0$ et $\theta^{O'} = 0$) fournit la valeur de la déformation plastique $\bar{\varepsilon}^P$ obtenue par chargement jusqu'au point M :

$$2G\bar{\varepsilon}^P = \Lambda\theta^M\bar{\delta} + 2G\bar{\varepsilon}^M - \bar{\sigma}^M$$

Si le matériau était resté élastique linéaire il aurait fallu lui appliquer, pour obtenir la même déformation $\bar{\varepsilon}^M$, une contrainte : $\bar{\sigma}^{fM} = \Lambda\theta^M\bar{\delta} + 2G\bar{\varepsilon}^M$. La déformation plastique résultant du chargement réel (point M) s'obtient donc à partir de la différence entre la contrainte *fictive* $\bar{\sigma}^{fM}$ solution du problème *élastique linéaire* (point M') et la contrainte vraie $\bar{\sigma}^M$ solution du problème *élasto-plastique réel*. D'où le théorème de la décharge :

$$\bar{\varepsilon}^P = \frac{1}{2G}(\bar{\sigma}^f - \bar{\sigma})$$

• Pour rétablir la *forme initiale* et annuler $\bar{\varepsilon}^P$ il faut poursuivre la décharge et appliquer un état de contrainte $\bar{\sigma}^{rM}$ (point I) tel que $\bar{\sigma}^{rM} = -2G\bar{\varepsilon}^P = -(\bar{\sigma}^{fM} - \bar{\sigma}^M)$. Cet état de *contrainte résiduelle* (induite par la plasticité qui a créé la déformation $\bar{\varepsilon}^P$ obtenue après décharge totale au point O') correspond à la contrainte de contention et à l'énergie élastique bloquée. Il s'obtient aussi directement à partir de la différence entre la solution *élastique fictive* $\bar{\sigma}^{fM}$ et la solution *élasto-plastique réelle* $\bar{\sigma}^M$. Il est *auto équilibré* dans le matériau : $\mathbf{Div}(\bar{\sigma}^{rM}) = 0$.

4.5 La plasticité à l'échelle microscopique

4.5.1 Le glissement dans un monocristal

L'*expérience* montre que les solides monocristallins se déforment plastiquement à *basse température* par glissements le long de directions particulières dans les plans cristallographiques les plus denses.

Contrainte théorique de glissement

L'énergie du cristal est une fonction *périodique* de la distance de glissement puisqu'un décalage d'une distance atomique d'un plan dense par rapport à son voisin dans la direction du glissement ramène l'ensemble des atomes dans des positions énergétiquement équivalentes. En l'absence de contrainte les atomes occupent des positions telles que cette énergie est minimale.

Tant que l'amplitude τ du cisaillement dans la direction du glissement γ reste faible sa suppression entraîne le retour en position d'énergie minimale, le comportement est *élastique*.

Au delà d'un certain seuil de cission τ_{th} on franchit la barrière énergétique et le plan glisse d'une distance interatomique pour se retrouver en position d'énergie minimale. Après suppression de la contrainte il reste un glissement résiduel, le comportement est devenu plastique.

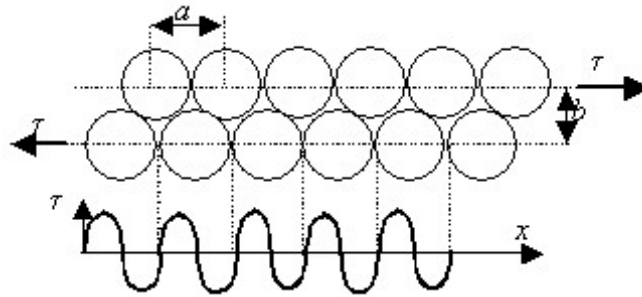


FIG. 4.21 – Résistance théorique au cisaillement

La cission τ étant la dérivée de l'énergie par rapport au glissement γ , elle est aussi périodique de période égale à la distance interatomique a le long de la ligne de glissement. Au premier terme du développement en série de Fourier :

$$\tau = \tau_{th} \sin \frac{2\pi}{a}x \quad \tau = \tau_{th} \sin \frac{2\pi}{a}b\gamma \approx \frac{2\pi}{a}b\gamma\tau_{th} \text{ lorsque } \gamma \rightarrow 0$$

x étant le déplacement d'une moitié du cristal par rapport à l'autre et b désignant la distance entre plans atomiques denses, aux faibles valeurs, où comportement est *élastique*, le glissement $\gamma = \frac{x}{b}$ est relié à la cission par $\tau = \mu\gamma$, μ étant le *module de cisaillement* du cristal dans la direction de glissement. D'où l'expression de la contrainte de cission théorique :

$$\tau_{th} = \frac{\mu a}{2\pi b} \quad \text{Pour } b \approx a \quad \tau_{th} \approx \frac{\mu}{10} \quad (4.7)$$

En pratique la cission *critique* τ_C mesurée sur des monocristaux est inférieure de plusieurs ordres de grandeur à la cission *théorique* τ_{th} .

Élément	Structure	Cission <i>critique</i> τ_C (Mpa)	Cission <i>théorique</i> τ_{th} (Mpa)
<i>Cu, Ag, Au</i>	CFC	1,0 - 0,60 - 0,92	700 - 1200
<i>Mg, Zn, Cd</i>	Hexagonal	0,83 - 0,94 - 0,58	2300

TAB. 4.2 – Cission critique et théorique des monocristaux

Origine de la plasticité dans les métaux

Les déformations *permanentes* ont toujours pour origine des *mécanismes de glissement*. A *haute température* ce sont les changements de structure voire de phase qui provoquent les glissements relatifs des grains les uns par rapport aux autres.

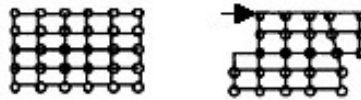


FIG. 4.22 – Glissement intragranulaire

A *température moins élevée* la déformation se fait uniquement par glissement intra-grain. Le mécanisme le plus fréquent est un mécanisme de translation : glissement d'une maille ou d'un nombre entier de mailles de part et d'autre d'un plan interatomique. Après glissement le réseau atomique retrouve sa disposition initiale mais le cristal s'est déformé de manière permanente.

Il existe une différence de plusieurs ordres de grandeur entre la limite élastique *théorique* et celle mesurée expérimentalement (Cf. Tab. 4.3), ce que confirme également le tableau des limites élastiques normalisées $\frac{\sigma_e}{E}$ (Cf. Annexe A.6). En 1934, pour lever cette contradiction entre théorie et expérience,

	Module de cisaillement μ (Gpa)	Limite d'élasticité σ_e (Mpa)	$\frac{\mu}{\sigma_e}$
Monocristaux			
<i>Al</i> monocristal	25	0,4	60000
<i>Ag</i> monocristal	28	0,6	45000
Polycristaux			
<i>Al</i> polycristal	25	30	830
<i>Al</i> polycristal <i>écroui</i>	25	100	250
Alliages			
Dural (AU4G)	25	360	70
Acier	80	650	120
Acier <i>Cr – Ni</i>	80	1200	67

TAB. 4.3 – Limite élastique *théorique* et *expérimentale*

Taylor a émis l'hypothèse que le glissement des plans atomiques ne s'effectue pas d'un bloc mais progressivement par propagation d'un défaut appelé *dislocation* dans l'arrangement des atomes. Son déplacement est plus aisé que le glissement en bloc car il n'intéresse qu'un tout petit nombre d'atomes

à la fois. Du point de vue de la déformation macroscopique, il aboutit au même résultat lorsque la ligne de dislocation a balayé tout le plan atomique, mais l'énergie nécessaire pour déplacer ce défaut de proche en proche correspond à celle du basculement d'une seule rangée atomique au lieu du basculement simultané de toutes les liaisons du plan de glissement. De ce fait, elle est nettement plus faible que l'énergie de basculement simultané. Il en est de même de la contrainte à appliquer pour obtenir le glissement.



FIG. 4.23 – Trichite de carbure de *Si* dans un composite à matrice *Al* (photo D. Chambolle)

Les *trichites* (whiskers en anglais), monocristaux aiguille ou filamenteux de très petit diamètre (quelques microns de diamètre) trop petit pour contenir des dislocations, présentent bien une limite élastique de l'ordre de $\tau_{th} = \frac{\mu}{10}$ démontrant le bien fondé de l'hypothèse de Taylor.

Trichite	<i>Graphite</i>	<i>Al₂O₃</i>	<i>Fe</i>	<i>SiC</i>
σ_e (Gpa)	19,6	15,4	12,6	20
μ (Gpa)	257	200	74	263
$\frac{\mu}{\sigma_e}$	13	13	6	13

TAB. 4.4 – *Trichites* et limite élastique *théorique*

4.5.2 Les dislocations

Limitons l'étude au cas où la déformation plastique résulte du déplacement des défauts du réseau : les dislocations. Les divers obstacles qu'elles doivent franchir vont conditionner l'amplitude de la contrainte à appliquer pour obtenir une déformation plastique explicitant les différences de dureté entre covalents et métaux, la nature de l'écrouissage, l'influence de la taille des grains, des atomes étrangers en solution solide, des précipités et des inclusions. La dureté (Cf. Tab. 4.3) croît du monocristal à l'alliage traduisant l'augmentation de résistance au déplacement des dislocations. Ces effets ont des conséquences pratiques importantes pour le développement de matériaux à haute limite d'élasticité et pour la description du comportement au cours des opérations de corroyage (mise en forme par déformation plastique) et pour la compréhension du fluage.

Géométrie

Dans un solide continu on réalise une coupure selon une surface S s'appuyant sur une ligne l . On translate ensuite les lèvres ainsi formées l'une par rapport à l'autre selon un vecteur \vec{b} appelé *vecteur de Burgers* de la dislocation. Cette opération nécessite l'application d'efforts sur le solide. On supprime la discontinuité ainsi créée au sein du matériau en comblant les vides créés par de la matière ou en collant les lèvres s'il a fallu retirer de la matière pour réaliser la translation. Après collage on retire les efforts extérieurs. Il subsiste alors au sein du matériau un champ de contraintes internes *autoéquilibré indépendant* de la surface S choisie. Il est entièrement caractérisé par la donnée de la ligne l et du vecteur de Burgers \vec{b} . Cette ligne l est la *dislocation* caractérisée par son vecteur de Burgers \vec{b} et son vecteur tangent \vec{t} définissant le sens de parcours sur la ligne.

Toute dislocation se décompose sur la base formée par la dislocation *Coin* $\vec{b} \perp \vec{t}$ et la dislocation *Vis* $\vec{b} // \vec{t}$ correspondant à la décomposition d'une dislocation mixte sur sa base propre. Il suffit donc d'étudier ces deux types de dislocations. La dislocation *Coin* correspond à l'insertion d'un demi plan d'atomes supplémentaire, comme une demi page insérée entre les pages d'un livre.

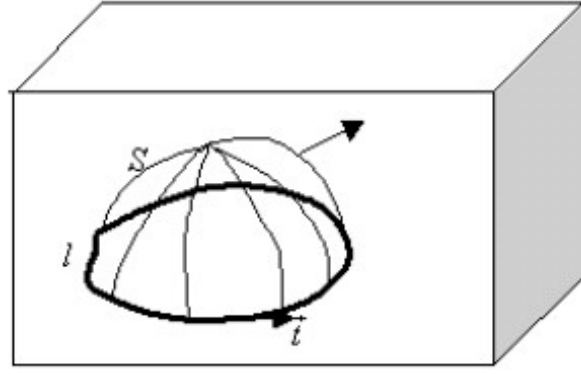
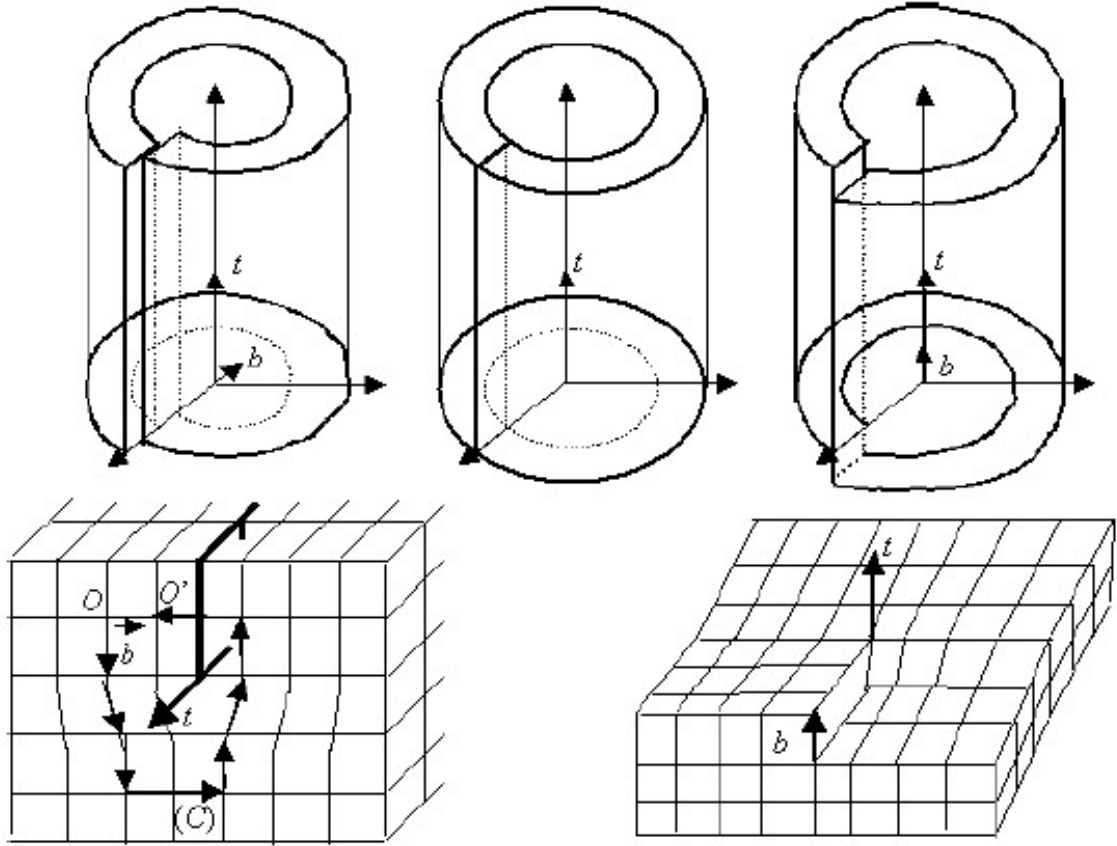
FIG. 4.24 – Description *virtuelle* de la création d'une ligne de dislocation

FIG. 4.25 – Dislocations Coin et Vis : Aspects macroscopique et microscopique

Propriétés

En désignant par $d\vec{u}$ le déplacement de chaque atome par rapport à sa position dans le réseau *idéal* sans dislocation, le vecteur $\oint_C d\vec{u}$ sur un contour arbitraire fermé (C) passant par les nœuds du réseau atomique entourant la ligne de dislocation l n'est pas nul. En orientant ce contour (C) dans le sens direct (règle du tire bouchon) à partir du sens défini par l'orientation choisie pour le vecteur tangent \vec{t} pour parcourir l le vecteur de Burgers de la dislocation est donné par :

$$\oint_C d\vec{u} = \oint_C d\vec{u} \mathbf{Grad} \vec{u} d\vec{x} = -\vec{b}$$

La ligne de dislocation est le lieu des points singuliers du champ de déformation. Elle est analogue à la ligne tourbillon de la mécanique des fluides (circulation de la vitesse autour d'un vortex) où à un conducteur parcouru par un courant électrique (circulation du champ magnétique) d'où son nom de vortex solide. Le champ gradient du déplacement étant ici un tenseur de rang 2, sa circulation est un

FIG. 4.26 – Dislocations : Circulation de **Grad** \vec{u} et loi des noeuds

vecteur, le vecteur de Bùrgers, au lieu d'être un scalaire comme en électricité ou en mécanique des fluides. Il en résulte que la ligne de dislocation l est :

- Soit une boucle fermée.
- Soit une ligne débouchant à la surface du corps.
- Soit une ligne rencontrant une autre dislocation et formant un nœud qui vérifie l'équation d'équilibre (loi des noeuds) $\vec{b}_1 + \vec{b}_2 + \vec{b}_3 = 0$, les tangentes aux différentes lignes concourant au nœud étant toutes orientées dans un même sens convergent ou divergent par rapport au nœud.

La périodicité du réseau impose des restrictions sur les valeurs possibles du vecteur de Bùrgers \vec{b} des dislocations. Il doit être tel que le déplacement résultant rétablisse la périodicité du réseau. Les vecteurs de Bùrgers sont donc des multiples des vecteurs du réseau, (donc des distances interatomiques).

Déformation et contrainte induites

La condition de circulation signifie qu'en présence d'une dislocation le vecteur déplacement \vec{u} est une fonction *multivaluée* des coordonnées subissant un accroissement donné lorsqu'on décrit un contour fermé (C) autour de la ligne de dislocation l . Physiquement il n'en est rien car l'accroissement représente une translation supplémentaire des points du réseau égale à une des périodes ce qui n'affecte en rien son état. Cela signifie simplement qu'en présence de dislocations le réseau n'est pas au repos mais soumis à un système de contraintes responsables de la distorsion par rapport au réseau idéal. Ces contraintes internes liées au fait que les atomes ne sont pas au fond des puits de potentiel du réseau cristallin idéal forment un champ *autoéquilibré*. Les dislocations sont des défauts thermodynamiquement instables qui sont responsables de l'énergie élastique *bloquée* au sein du matériau. On devrait s'attendre à ce qu'ils disparaissent en vertu du principe du minimum d'énergie. En pratique ces défauts sont piégés au sein du matériau et nécessitent un processus d'activation pour pouvoir se déplacer et s'annihiler entre eux ou s'évacuer hors de la matière. De ce fait ce sont des défauts *thermodynamiquement métastables*.

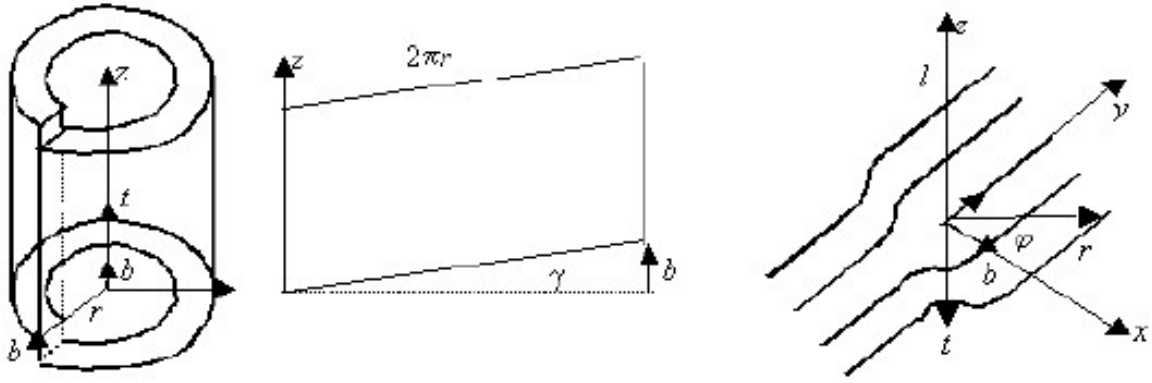
Par invariance par translation le gradient de déplacement **Grad** \vec{u} le long d'une ligne de dislocation ne dépend que des coordonnées du plan perpendiculaire à la ligne. La circulation $\oint_C \mathbf{Grad} \vec{u} d\vec{x} = -\vec{b}$ le long d'un circuit entourant la dislocation ne doit pas varier dans une *homothétie* de contour dans ce plan. Ceci n'est possible que si **Grad** \vec{u} , $\bar{\varepsilon}$ et $\bar{\sigma}$ varient comme $\frac{1}{r}$. Le champ $\bar{\sigma}$ d'une *ligne* de dislocation est un champ à *longue portée*.

Champs de contrainte et de déformation d'une dislocation

Dislocation vis Par invariance par translation et par raison de symétrie le champ de déplacement n'admet qu'une composante u_z fonction de r et φ mais indépendante de z . En dépliant le cylindre macroscopique de hauteur unité décrivant la dislocation, la déformation correspond à un glissement simple, sans variation de volume, d'amplitude $\gamma = 2\varepsilon_{z\phi} = \frac{b}{2\pi r}$, soit :

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{b}{2\pi}\varphi \end{pmatrix} \quad \bar{\varepsilon} = \frac{b}{4\pi r} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \bar{\sigma} = \frac{\mu b}{2\pi r} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.8)$$

Dislocation coin Par invariance par translation le long de la ligne z de la dislocation *Coin* dont le vecteur de Bùrgers $\vec{b}(b, 0, 0)$ est orienté selon Ox , le champ de déplacement \vec{u} appartient au

FIG. 4.27 – Champ de contrainte dislocation *Vis* et dislocation *Coin*

plan x, y et ses composantes ne sont pas fonction de z . Il lui correspond un état de *déformation plane* et un état de contrainte :

$$\begin{aligned} \varepsilon_{rr} = \varepsilon_{\varphi\varphi} &= -\frac{b}{2\pi} \frac{1-2\eta}{2(1-\eta)} \frac{1}{r} \sin \varphi & 2\varepsilon_{r\varphi} &= \frac{b}{2\pi} \frac{1}{1-\eta} \frac{1}{r} \cos \varphi & \varepsilon_{zz} &= 0 \\ \sigma_{rr} = \sigma_{\varphi\varphi} &= -b \frac{\mu}{2\pi(1-\eta)} \frac{1}{r} \sin \varphi & \sigma_{r\varphi} &= b \frac{\mu}{2\pi(1-\eta)} \frac{1}{r} \cos \varphi & \sigma_{zz} &= \eta(\sigma_{rr} + \sigma_{\varphi\varphi}) \end{aligned} \quad (4.9)$$

Énergie et tension de ligne

L'énergie par unité de longueur de dislocation $E = \frac{1}{2} \int_V \mathbf{Tr}(\overline{\sigma} \overline{\varepsilon}) dV$ est aussi égale au travail $\frac{1}{2} \int_S \vec{b} \cdot \vec{n} dS$ nécessaire pour déplacer les lèvres de la coupure d'aire S de la quantité \vec{b} , \vec{n} désignant la normale à la surface de coupure (Cf. Fig. 4.25). La seule composante de contrainte intervenant dans l'expression étant $\sigma_{z\varphi}$ pour la dislocation *Vis* ($\vec{b} // Oz$ et $\vec{n} // O\varphi$) et $\sigma_{r\varphi}(\varphi = 0)$ pour la dislocation *Coin* ($\vec{b} // Or$ et $\vec{n} // O\varphi$), en posant $D = \frac{\mu}{2\pi}$ pour la dislocation *Vis* et $D = \frac{\mu}{2\pi(1-\eta)}$ pour la dislocation *Coin*, l'énergie par unité de longueur de dislocation se réduit à :

$$E = \frac{1}{2} D b^2 \int \frac{dr}{r} = \frac{1}{2} D b^2 \text{Ln} \frac{r_{Sup}}{r_{Inf}}$$

et présente une divergence logarithmique aux deux limites.

La limite *inférieure* r_{Inf} est de l'ordre de grandeur de la distance interatomique $r_{Inf} \approx b \approx 0,25$ nm. Elle définit le *cœur* de la dislocation où les positions des atomes sont telles qu'il est impossible de les décrire par la théorie de l'élasticité. La limite *supérieure* r_{Sup} correspond *physiquement* à la distance moyenne l_D entre deux dislocations. Dans les métaux *recuits* la distance moyenne entre dislocation est $l_D \approx 10^{-4}$ cm. Leurs champs de contrainte s'annihilent mutuellement à des distances de cet ordre car, le champ de contraintes internes étant *autoéquilibré*, il y a statistiquement autant de dislocations d'un signe que de dislocations de signe contraire. L'énergie d'une dislocation isolée serait donc considérable dans un solide de grandes dimensions. En pratique il est très difficile de produire des cristaux contenant de faibles densités de dislocation.

L'énergie par unité de longueur de dislocation, *énergie élastique piégée* dans le solide vaut :

$$E^E \approx \frac{\mu b^2}{4\pi} \text{Ln} \frac{l_D}{b}$$

Avec ces valeurs, l'ordre de grandeur de E^E est de $0,6$ à $0,7 \mu b^2$.

A cette énergie il faut adjoindre l'énergie piégée dans le *cœur* où les lois de l'élasticité ne sont plus valables. On peut estimer la déformation à $\varepsilon \approx 0,2$ et la contrainte $\sigma \approx \frac{\mu}{10}$ et l'énergie *singulière de cœur* vaut :

$$E^C \approx 0,02 \mu b^2$$

Dans les métaux, cette énergie singulière de cœur E^C ne représente que quelques % de l'énergie élastique E^E .

Il ne s'agit là que d'ordres de grandeur et l'on s'accorde généralement pour prendre comme énergie par unité de longueur de dislocation :

$$E = \frac{1}{2}\mu b^2 \quad (4.10)$$

Il n'en reste pas moins vrai que l'énergie de dislocation reste *très grande* par rapport à son entropie.

- L'énergie E^L d'une dislocation de longueur L vaut $E^L = \frac{1}{2}\mu b^2 L$. Comme sur L il y a Nb atomes, l'énergie par atome vaut $E^A = \frac{E^L}{N} = \frac{1}{2}\mu b^3$.

- Le nombre de positions que peut occuper une dislocation de longueur L (volume Lb^2) dans un cube d'arête L est $(\frac{L}{b})^2$. L'entropie de configuration S^L correspondante est $S^L = k \ln(\frac{L}{b})^2$, k désignant la constante de Boltzman. L'entropie par atome vaut $S^A = \frac{S^L}{N} = \frac{b}{L} k \ln(\frac{L}{b})^2$.

En prenant pour L la distance moyenne entre dislocations l_D l'énergie *libre* par atome vaut :

$$F^A = E^A - TS^A = \frac{1}{2}\mu b^3 - \frac{b}{l_D} \ln(\frac{l_D}{b})^2 kT \quad (4.11)$$

Pour le cuivre $\mu = 4.10^{10} Nm^{-2}$ et $b \cong 2,5.10^{-10}m$, l'énergie par unité de longueur de dislocation vaut $E = 1,25.10^9 Jm^{-1}$ soit $E^A \approx 2eV$ par atome le long de la ligne de dislocation. Avec $l_D = 10^{-4}cm$ l'entropie par atome vaut $S^A \approx 4.10^{-3}k$. A l'ambiante $kT \approx \frac{1}{40}eV$ de sorte que $S^A \ll E^A$ et l'énergie libre $F^A \cong E^A > 0$. Une dislocation augmente *fortement l'énergie libre*. Bien que *thermodynamiquement* instables prises *isolément*, les dislocations forment des réseaux *autostabilisés* et sont toujours présentes dans un cristal.

Courber un segment de dislocation en maintenant ses deux extrémités fixes augmente sa longueur l donc son énergie E . Cela revient à dire qu'il existe *tension de ligne de dislocation* $T = \frac{dE}{dl}$, force de tension régnant le long de la ligne de dislocation et qui tend à la rendre rectiligne.

$$T = \frac{dE}{dl} = \frac{1}{2}\mu b^2 \quad (4.12)$$

Densité de dislocation

La densité de dislocation ρ_D est définie comme *la longueur totale de dislocation par unité de volume*. Dimensionnellement c'est l'inverse d'une surface, ρ_D se mesure en cm^{-2} . Les dislocations perturbent les distances d entre plans cristallographiques et leurs orientations θ , elles sont donc visibles en microscopie électronique. Localement la présence d'une dislocation détruit la condition de réflexion de Bragg vérifiée par le plan cristallographique choisi, elle apparaît comme une ligne sombre sur le champ d'observation comme sur ce cliché de microscopie électronique d'un acier inoxydable austénitique. Nous avons un moyen expérimental de *voir* les dislocations. Il faut cependant relier la densité de dislocation ρ_D à une quantité mesurable en surface. Estimons la densité ρ_D de dislocation dans un cube élémentaire de matière d'arête L petite devant la longueur des dislocations en admettant qu'il contient N morceaux de dislocations de longueur L de même vecteur de Burgers \vec{b} . La longueur totale de dislocation est NL dans le volume $V = L^3$ et la densité de dislocation : $\rho_D = \frac{NL}{V} = \frac{N}{L^2} = \frac{N}{S}$, soit *le nombre de dislocations traversant l'unité d'aire*.

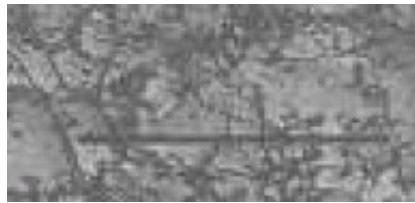


FIG. 4.28 – Cliché de microscopie électronique d'un acier inoxydable.

Cette méthode de comptage permet de déterminer expérimentalement une *densité approximative de dislocation* ρ_D . Le tableau suivant donne les valeurs approximatives des densités de dislocation en fonction de l'état du matériau.

Etat	ρ_D (cm ⁻²)	$\frac{\Delta V}{V}$ ($b = 3, 1.10^{-10}m$)
Monocristaux solidifiés avec précaution	$10^2 - 10^3$	$10^{-13} - 10^{-12}$
Monocristaux recuits	$10^5 - 10^6$	$10^{-10} - 10^{-9}$
Polycristaux recuits	$10^6 - 10^7$	$10^{-9} - 10^{-8}$
Polycristaux fortement écrouis	$10^9 - 10^{12}$	$10^{-6} - 10^{-3}$

TAB. 4.5 – Densité de dislocation et variation relative de volume associée

Variation de volume induite

Le champ de glissement simple induit par une dislocation *Vis* n'induit pas de variation de volume. Ce résultat reste vrai pour une dislocation *Coin*, la variation < 0 dans la région en compression compensant exactement la variation > 0 dans la région en traction. D'une manière plus générale, le champ de contraintes internes crée par la présence de dislocations étant *autoéquilibré*, $\langle \bar{\sigma} \rangle = 0$, la variation de volume résultante est nulle. Cependant, le cœur des dislocations est trop déformé pour obéir aux lois de l'élasticité linéaire. La coeur de la dislocation forme un tube de rayon $r \sim b$, soit une section $S \sim b^2$ à peu près équivalente à celle d'un tube de lacune. La présence des dislocations se traduit donc par un accroissement relatif de volume $\frac{\Delta V}{V} \sim \frac{S\mathcal{L}}{V}$ avec \mathcal{L} longueur totale des dislocations contenues dans le volume V , soit $\frac{\Delta V}{V} \sim \rho_D b^2$. Conséquence essentielle : la déformation plastique macroscopique liée à l'augmentation de la densité de dislocations s'accompagne d'une variation de volume tout à fait négligeable, justifiant l'*hypothèse de déformation plastique à volume constant* de la mécanique des solides *cohérents*.

4.5.3 Action d'un champ de contrainte externe sur une dislocations

Les dislocations interagissent avec la contrainte appliquée au cristal, que celle-ci provienne d'une action extérieure ou de la présence de contraintes induites par des défauts voisins.

Force de Peach-Koehler

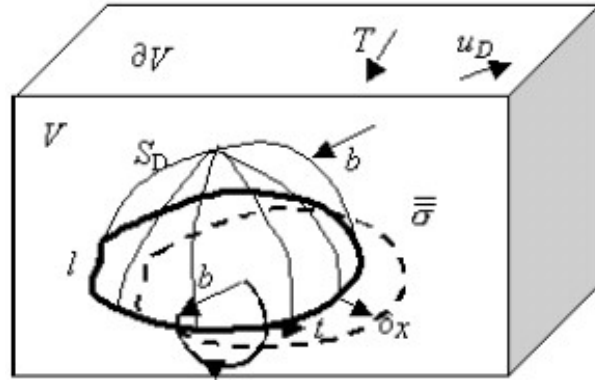


FIG. 4.29 – Action d'un champ de contrainte sur une dislocation

Au sein d'un volume de matière V de surface extérieure ∂V l'existence d'une dislocation se traduit au par un champ de contraintes *internes* $\bar{\sigma}_D$, un champ de déplacement \vec{u}_D responsable de la distorsion du réseau atomique et une énergie élastique *piégée* E_D . L'application d'efforts \vec{T} crée un champ de contrainte externe $\bar{\sigma}^e$, un champ de déplacement \vec{u} et une énergie élastique *stockée* E_T indépendante de E_D . L'énergie élastique *emmagasinée* est $E = E_D + E_T$.

- *Dislocation préexistante*

Si les forces T varient, leur travail élémentaire $\delta W = \int_{\partial V} \vec{T} \delta \vec{u} dV$ est égal à la variation de l'énergie élastique emmagasinée $\delta E = \delta E_T + \delta E_D$. La variation d'énergie élastique *piégée* δE_D est égale au travail des forces $f_D = \bar{\sigma}_D \vec{n}$, \vec{n} normale extérieure à ∂V , dans le champ de déplacement $\delta \vec{u}$ créée par

\vec{T} . Or, ces forces f_D sont nulles, la surface étant libre de charge en l'absence de chargement externe, et leur travail donc la variation δE_D le sont également.

La variation d'énergie se réduit à la seule variation d'énergie élastique δE_T égale au travail des forces externes δW . Elle ne dépend pas de la présence de la dislocation. En d'autres termes une *mesure des constantes élastiques ne permet pas de détecter les dislocations*. Il faut que les dislocations se déplacent pour qu'elles soient mécaniquement détectables sous la forme d'une *déformation plastique irréversible*.

- *Création d'une Dislocation*

A l'inverse créons au sein de la matière soumise aux actions externes \vec{T} ayant *stocké* une énergie élastique E_T une dislocation de vecteur de Burgers \vec{b} en appliquant les efforts T_D sur la surface de coupure S_D s'appuyant sur la ligne l orientée de vecteur tangent \vec{t} . Le travail W dépensé par les forces T_D pour déplacer de \vec{b} les lèvres de la coupure est égal à l'énergie E_D de la dislocation auquel il faut ajouter le travail $\int_{\partial V} \vec{T} \vec{u}_D dS$ des forces extérieures établies \vec{T} dans le champ \vec{u}_D créée par la dislocation et celui $-\int_{S_D} (\vec{\sigma} \vec{n}) \cdot \vec{b} dS$ des contraintes $\vec{\sigma}$ sur la face origine du circuit de Burgers de la surface de coupure S_D de normale extérieure \vec{n} . Le signe *néglatif* provient de la convention d'orientation du circuit de Burgers et $\vec{\sigma}$ est la somme des contraintes appliquées $\vec{\sigma}^e$ et d'éventuelles contraintes internes provenant de sources comme par exemples d'autres dislocations.

Au total l'énergie élastique emmagasinée $E = E_D + E_T + \int_{\partial V} \vec{T} \vec{u}_D dS - \int_{S_D} (\vec{\sigma} \vec{n}) \cdot \vec{b} dS$ doit rester égale à $E_D + E_T$. Il en résulte l'égalité :

$$\int_{\partial V} \vec{T} \vec{u}_D dS = \int_{S_D} (\vec{\sigma} \vec{n}) \cdot \vec{b} dS$$

- *Déplacement d'une Dislocation*

Lorsqu'une dislocation existante *se déplace* de $\delta \vec{x}(s)$, s étant l'abscisse curviligne de la ligne de dislocation l , le travail des efforts externes correspondant est :

$$\delta W = \int_{\partial V} \vec{T} \delta \vec{u}_D dS = \delta \int_{S_D} (\vec{\sigma} \vec{n}) \cdot \vec{b} dS = \int_l [(\vec{\sigma} \vec{n}) \wedge \vec{t}] \delta \vec{x} ds$$

En écrivant ce travail sous la forme $\delta W = \int_l \vec{F} \delta \vec{x} ds$, l'action du champ de contrainte $\vec{\sigma}$ sur une dislocation de vecteur de Burgers \vec{b} se réduit à une *force par unité de longueur de dislocation* appelée force de Peach-Köhler :

$$\vec{F} = (\vec{\sigma} \vec{n}) \wedge \vec{t} \quad (4.13)$$

Cette force est toujours *normale* au plan défini par les vecteurs \vec{t} et $(\vec{\sigma} \vec{b})$. En particulier elle est toujours *perpendiculaire* à la ligne de dislocation l .

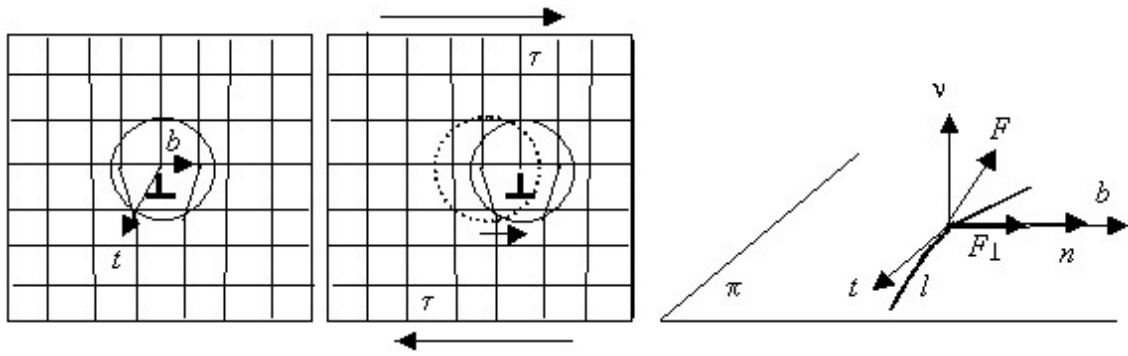
Plan de glissement et force de montée

Le *plan de glissement* π d'un segment de dislocation est le plan défini par les vecteurs \vec{t} et \vec{b} . Une dislocation *Vis* admet une infinité ($\vec{b} // \vec{t}$) de plans de glissement alors qu'il est unique ($\vec{b} \perp \vec{t}$) pour une dislocation *Coin*. La particularité *physique* du plan de glissement, résultant de la structure microscopique de la dislocation, fait qu'elle ne peut se déplacer plus ou moins facilement que dans ce plan. Mais le seul déplacement possible de la dislocation à *basse température* s'effectue dans la direction de \vec{b} car il suffit de déplacements relativement petits des atomes entourant le *cœur* pour décaler le demi plan supplémentaire d'une distance \vec{b} en conservant l'organisation du réseau cristallin (glissement *conservatif*).

Dans le repère local défini par la *tangente* \vec{t} à la ligne de dislocation l , sa *normale* \vec{n} (appartenant au plan de glissement π contenant \vec{t}) et sa *binormale* $\vec{v} = \vec{t} \wedge \vec{n}$ la facette du plan de glissement de normale \vec{v} est soumise à un vecteur contrainte $\vec{T} = \vec{\sigma} \vec{v}$ produit par le champ externe $\vec{\sigma}$.

La cission résolue τ , contrainte de *cisaillement* dans la direction de glissement \vec{b} vaut $\tau = \vec{v} \vec{\sigma} \vec{b} = \frac{\vec{b}}{b} \vec{\sigma} \vec{v}$ (par symétrie de $\vec{\sigma}$) avec b module de \vec{b} .

La force de Peach-Köhler \vec{F} étant \perp à \vec{t} c'est sa composante $\vec{F}_\perp = (\vec{F} \vec{n}) \vec{n}$ dans le plan π qui détermine les possibilités de glissement, de multiplication et de franchissements d'obstacles à *basse*

FIG. 4.30 – Glissement d'une dislocation *Coin*

température. Comme $[(\vec{\sigma} \vec{b}) \wedge \vec{t}] \vec{n} = \vec{b} \vec{\sigma} (\vec{t} \wedge \vec{n}) = \vec{b} \vec{\sigma} \vec{v}$ elle est directement liée à la cisssion résolue τ par $F_{\perp} = \tau b \vec{n}$.

La seule direction de glissement autorisé d'une dislocation *Coin* à basse température étant *parallèle* à \vec{b} , cette force se réduit à $F_{\perp} = \tau b$.

On appelle $\vec{F} - \vec{F}_{\perp}$ force de *montée*. C'est la partie de \vec{F} qui tend à faire quitter le plan de glissement. Un tel mouvement (*non conservatif*), appelé *montée* de la dislocation quelque soit son sens le long de la direction \perp à π , n'est possible que si les atomes du demi plan excédentaire s'en échappe par diffusion d'atome ou de lacune ce qui nécessite une activation thermique importante donc une *température élevée*.

Mécanisme de glissement d'une dislocation *Coin*

Le champ de contrainte externe exerce une force $f = \tau b$ par unité de longueur de ligne de dislocation. Si cette force est suffisante pour vaincre la résistance au mouvement la ligne de dislocation se déplace au sein du cristal provoquant une marche plastique d'amplitude b . Le mouvement de la dislocation correspond à la rupture des liaisons des atomes de *cœur* puis à leur restauration avec leurs plus proches voisins dans le sens du mouvement. Ce processus est beaucoup plus aisé que le glissement d'un bloc d'un demi cristal par rapport à l'autre qui nécessiterait la rupture simultanée de toutes les liaisons, donc des énergies et des contraintes appliquées beaucoup plus intenses. Le mécanisme

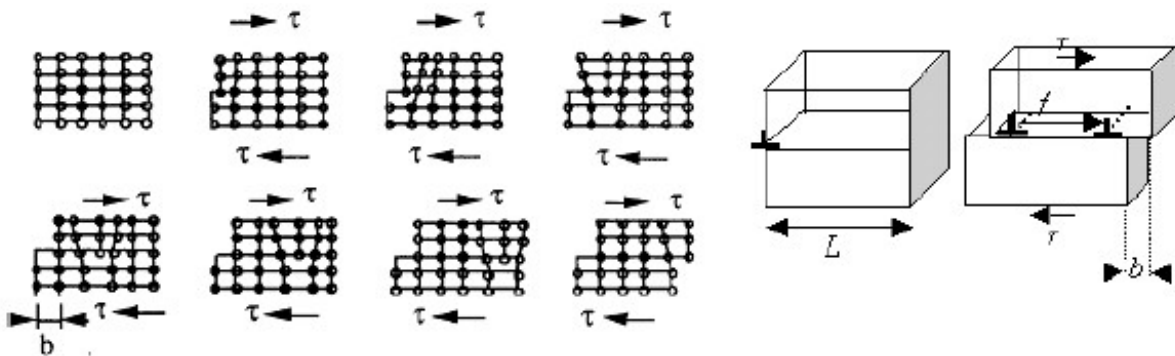


FIG. 4.31 – Glissement macroscopique induit par le mouvement d'une dislocation

de décalage des deux demi cristaux obtenus lorsque la dislocation a balayé la totalité de l'aire du plan de glissement s'apparente à celui employé pour déplacer un tapis. Le déplacement d'un bloc du tapis en tirant sur un bord met en jeu une force importante pour vaincre l'effort de frottement qui se développe sur la totalité de la surface du tapis (équivalent d'un mouvement en bloc de l'ensemble du plan de glissement). Il est beaucoup plus aisé de déplacer le tapis en lançant un pli (équivalent de la dislocation) qui, se propageant de proche en proche, conduira au même déplacement final mais avec un effort beaucoup plus faible.



FIG. 4.32 – Analogie de Mott

Déformation macroscopique induite

Pour un bloc initialement cubique d'arête L , lorsque la dislocation a parcouru la distance L , elle a balayé une aire $A = L^2$ provoquant un glissement macroscopique moyen $\gamma = \frac{b}{L}$ que l'on peut écrire $\gamma = \frac{bL^2}{L^3} = \frac{bA}{V}$. Une dislocation de vecteur de burgers \vec{b} balayant une aire δA au sein d'un volume de matière V produira un accroissement de glissement macroscopique :

$$\delta\gamma = \frac{b\delta A}{V} \quad (4.14)$$

Par ailleurs, la densité de dislocation dans ce même volume est $\rho_D = \frac{NL}{V}$, N étant le nombre de dislocations de vecteur de Burgers b et de longueur L . Si chacune des dislocations se déplace d'une distance moyenne l_D elle balaye une surface $\delta A = Ll_D$ et produit un glissement $\delta\gamma = \frac{bLl_D}{V}$. Le glissement macroscopique total $\gamma = N\delta\gamma = \frac{NL}{V}bl_D = \rho_D bl_D$. En pratique seule une fraction ρ_m des dislocations est mobile. \bar{v} étant leur vitesse moyenne la vitesse de glissement macroscopique est

$$\dot{\gamma} = \rho_m b \bar{v} \quad (4.15)$$

La densité *initiale* de dislocations n'autorise pas une déformation plastique de grande amplitude. Même en supposant que toutes les dislocations soient mobiles la déformation plastique *maximale* d'un grain de polycristal recuit de taille typique $\phi = 100 \mu\text{m}$ contenant une densité $\rho_D = 10^8 \text{cm}^{-2}$ de dislocations de vecteur de Burgers $b = 2,5 \cdot 10^{-8} \text{cm}$ est limitée à $\gamma = \rho_D b \phi = 2,5\%$.

- *Dislocations d'accommodation géométrique*

Pour former un solide par déformation plastique il faut une densité de dislocation ρ_G dite *densité de dislocation d'accommodation géométrique*.

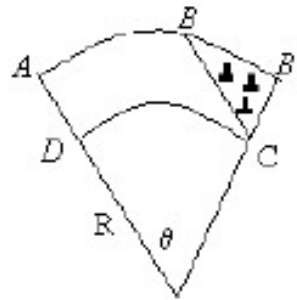


FIG. 4.33 – Flexion plastique et densité d'accommodation géométrique

Estimons la densité ρ_G nécessaire dans le cas simple d'une poutre en flexion en traçant un circuit de Burgers $ABCD$ dans le cristal non déformé. Il devient $AB'CD$ dans le cristal fléchi. Le défaut de fermeture du circuit BB' est égal au vecteur de Burgers total Nb , N étant le nombre de dislocations d'accommodation géométrique nécessaire. La densité ρ_G , nombre de dislocations par unité d'aire, nécessaire est $\rho_G = \frac{N}{S} = \frac{N}{AB \times AD} = \frac{1}{Rb}$ car $N = \frac{AB' - AB}{b}$ et $\frac{AB' - AB}{AD} = \frac{AB}{R}$. Avec $b = 2,5 \cdot 10^{-10} \text{m}$ et $\rho_D = 10^5 \text{cm}^{-2}$ La densité de dislocation ρ_D initialement présente est insuffisante pour atteindre une déformation plastique importante. Il faut donc admettre l'existence de mécanismes de multiplication des dislocations, ce que confirme l'expérience.

R (m)	0,01	0,1	1
ρ_G (cm ⁻²)	4.10^7	4.10^6	4.10^5
$\frac{\rho_G}{\rho_D}$	400	40	4

TAB. 4.6 – Densité d'accomodation géométrique en flexion

- *Moulin de Frank-Read*

Le moulin de Frank-Read est un des mécanismes efficaces de multiplication des dislocations.

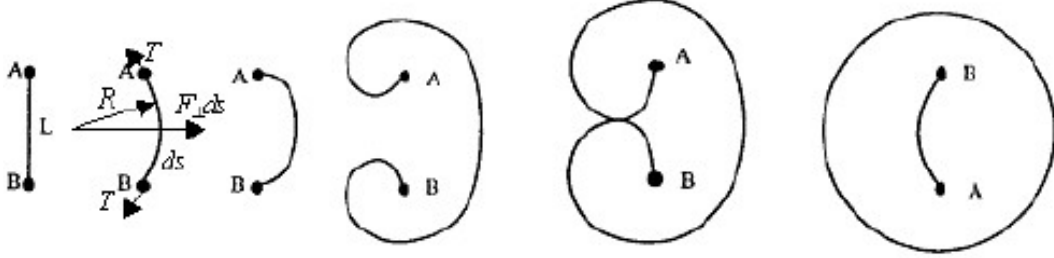


FIG. 4.34 – Multiplication des dislocations : mécanisme de Frank-Read

Sous l'effet de la cisssion τ qui s'exerce sur le plan de glissement la dislocation, ancrée en deux points A et B distants de L , se courbe de telle manière qu'un élément d'arc ds soit en équilibre sous l'action combinée de la force $F_{\perp} = \tau b$ et de la tension de ligne $T = \frac{1}{2}\mu b^2$. θ étant l'angle sous lequel on voit le segment ds depuis le centre de courbure, l'équilibre des forces $F_{\perp} ds = 2T \sin \frac{\theta}{2} \approx T\theta = \frac{Tds}{R}$ définit le rayon de courbure $R = \frac{1}{2} \frac{\mu b}{\tau}$. Lorsque τ augmente R diminue jusqu'à atteindre $\frac{L}{2}$ pour

$$\tau_{FR} = \frac{\mu b}{L} \quad (4.16)$$

contrainte critique d'activation du moulin, l'arc devient instable, tourne autour des points A et B distants de L et la recombinaison des portions de signes opposés en regard éjecte une boucle qui se propage par glissement et recrée un nouveau segment AB qui démarre un nouveau cycle. Un moulin de Frank-Read peut ainsi produire jusqu'à 500 boucles (Cf. Fig. 4.35).

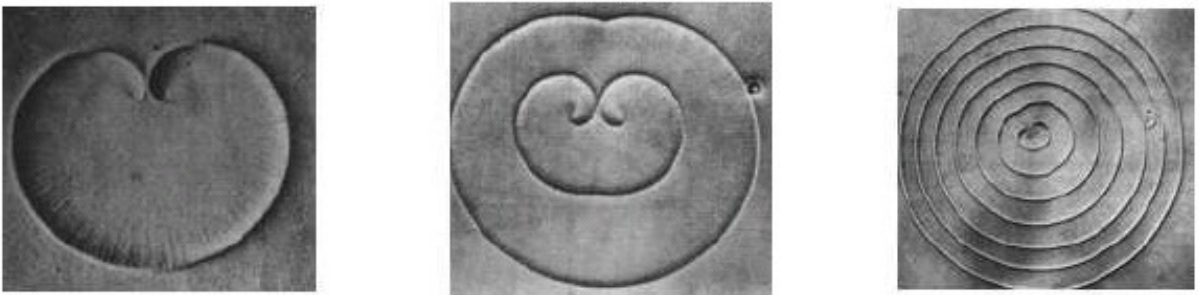


FIG. 4.35 – Marches superficielles sur une surface d'Aluminium polie électrolytiquement résultant de l'émergence de deux dislocations Vis. (J.M. Marchin, G. Wyon, Acta. Met. 10 (1962) 915)

4.5.4 Obstacles intrinsèques au mouvement des dislocations

La déformation plastique commence quand la cisssion sur le plan de glissement atteint une valeur critique capable de mettre les dislocations en mouvement. Cette force critique qui caractérise le seuil de plasticité et son évolution au cours de la déformation va dépendre de la résistance opposée au mouvement des dislocations. Cette résistance provient de la résistance des liaisons du réseau, de l'écrouissage et des joints de grain.

Résistance du réseau atomique Force de Peierls-Nabarro

L'énergie de cœur le long d'une dislocation est minimale lorsque celle-ci suit une rangée atomique dense, *vallée de Peierls*. Pour passer d'une vallée à la suivante et faire basculer les liaisons atomiques, il faut franchir une barrière de potentiel ΔE_{PN} à laquelle correspond une cission critique τ_{PN} traduisant la résistance du réseau au glissement des dislocations. Lorsque les vallées ne sont pas trop profondes le passage d'une vallée à l'autre ne s'effectue pas d'un bloc, mais par propagation d'une déviation où d'un décrochement. Le cristal, de part sa structure atomique et son type de liaison, va exercer une résistance comme s'il existait un frottement au mouvement des dislocations, résistance conduisant à un seuil d'écoulement τ_{PN} beaucoup plus élevé dans les covalents et les ioniques que dans les métaux.

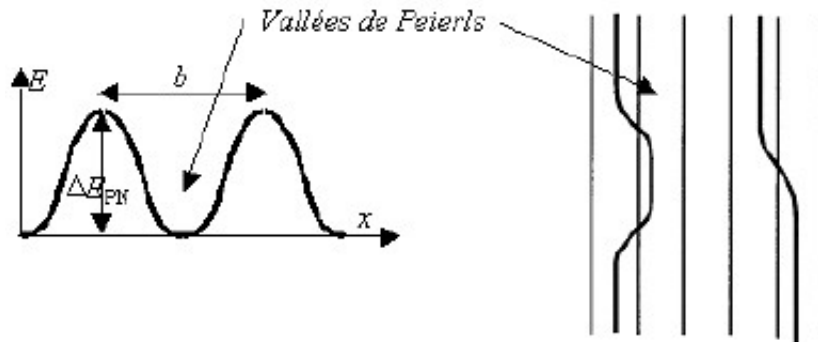


FIG. 4.36 – Friction de réseau, déviation et décrochement

- Liaisons *ionique et covalentes*

Dans les cristaux ioniques les glissements amènent face à face des ions de même signe provoquant une grande dépense d'énergie Coulombienne, dans les covalents les liaisons sont très orientées et très rigides. Dans ces matériaux la *profondeur* de vallées est particulièrement grande, les dislocations ont tendance à être rectilignes et à prendre des orientations cristallographiques particulières. La plupart des céramiques sont *intrinsèquement fragiles*, les liaisons ioniques ou covalentes opposent une énorme *force de friction de réseau* au déplacement des dislocations, quasi impossible à l'ambiante. Quand une dislocation se déplace dans une telle structure elle doit briser puis reconstituer les liaisons cours de son mouvement, ce qui s'apparente à la traversée d'une forêt en arrachant et en replantant tous les arbres rencontrés sur le passage. La rupture brutale intervient toujours avant la plastification car la contrainte τ_{PN} est une fraction importante du module d'Young E , typiquement $\frac{E}{30}$. Leur *dureté*, si élevées que le seul moyen de la mesurer consiste à indenter la céramique avec un pénétrateur en diamant, est à l'origine de leur utilisation comme abrasif ou outil de coupe (diamant, carbures, oxydes, nitrures...).

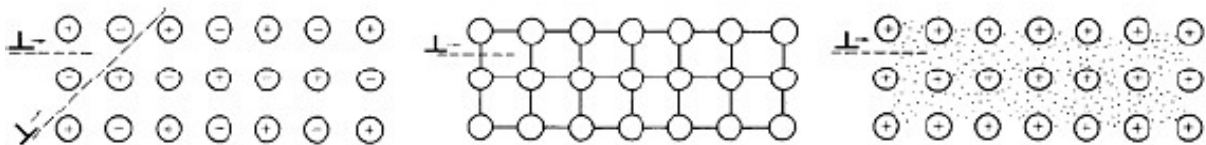


FIG. 4.37 – Résistance au mouvement des liaisons ionique, covalente et métallique

- Liaison *métallique*

Les métaux purs sont *intrinsèquement ductiles* car la liaison métallique est délocalisée et les vallées de Peierls beaucoup moins profondes. Le passage d'une dislocation déplace les atomes situés au-dessus de son plan de glissement par rapport à ceux qui sont en dessous, mais elle n'a qu'un faible effet sur les liaisons électrons-ions, son mouvement s'apparente à une promenade à travers des herbes hautes. Le réseau n'exerce qu'une légère *force de traînage* sur la dislocation mobile. La contrainte τ_{PN} est typiquement de l'ordre $\frac{E}{1000}$ ou moins pour des métaux mous comme le cuivre ou le plomb. A la

température ambiante ou au-dessus presque tous les métaux purs courants sont résistants à la rupture qui n'intervient qu'après une forte plastification.

Résistance du réseau de dislocations réseau de Frank

Les dislocations dans un cristal non écroui forment un réseau tridimensionnel de densité ρ_D appelé réseau de Frank dans lequel la distance *moyenne* entre dislocations $l_D = \rho_D^{-1/2}$. Ces dislocations interagissent entre elles et se placent en position d'énergie minimale dans les vallées de potentiel. Pour déplacer une dislocation dans son plan de glissement il faut lui faire franchir des collines qui résultent des interactions avec les autres dislocations. Parmi les dislocations environnantes, certaines sont dans des plans de glissement parallèles à celui de la dislocation à déplacer, les autres traversent, percent, son plan de glissement, ce sont les *arbres* de la *forêt*.

Deux dislocations qui s'intersectent peuvent se combiner pour former une dislocation de vecteur de Burgers $\vec{b}_1 + \vec{b}_2$ et d'énergie $\frac{1}{2}|\vec{b}_1 + \vec{b}_2|^2$. Lorsque $b_1 b_2 > 0$ la jonction est *répulsive* et le franchissement de l'arbre produit un *cran* mais lorsque $b_1 b_2 < 0$ cette jonction diminue l'énergie, elle est *attractive* et *stable*. Ces jonctions attractives peuvent servir de point d'ancrage pour les sources de Frank-Read. Leur distance moyenne étant de l'ordre de $L = 2l = 2\rho_D^{-1/2}$, puisqu'il y a en moyenne un arbre attractif sur deux, la contrainte d'activation du moulin de Frank-Read $\tau_{FR} = \frac{\mu b}{L}$ est de l'ordre de $\tau_C = \frac{\mu b}{2} \sqrt{\rho_D}$.

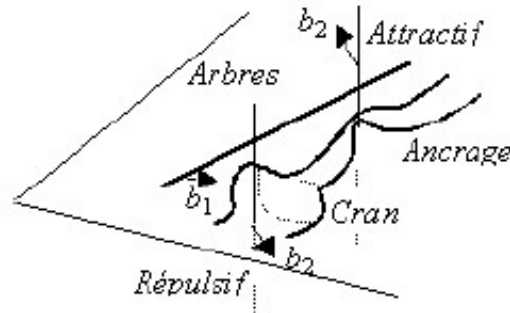


FIG. 4.38 – Interactions avec la forêt

Pour faire glisser les dislocations au milieu du réseau de Frank-Read la contrainte appliquée doit être supérieure au seuil :

$$\tau_C \approx \mu b \sqrt{\rho_D} \quad (4.17)$$

Lorsque ρ_D augmente τ_C augmente traduisant l'*écrouissage* du matériau à l'échelle macroscopique.

• Microdéformation du cristal

Tant que la contrainte appliquée τ ne dépasse pas la force de Peierls-Nabarro τ_{PN} , les dislocations sont immobiles et le matériau se comporte de façon *parfaitement élastique*.

Dès qu'elles commencent à bouger, elles forment des arcs entre les points d'ancrage et balayent des aires A conduisant à une déformation macroscopique supplémentaire produisant une diminution apparente du module d'élasticité. Cependant, tant que τ reste inférieur au seuil d'instabilité des arcs τ_{FR} elles reviennent à leur position initiale à la décharge. Le cristal reste élastique mais la courbe contrainte déformation présente de petites boucles d'hystérésis. Ce phénomène dissipatif *anelastique* correspond à l'accroissement du frottement interne avec l'augmentation de la déformation.

Le moment où τ atteint la limite d'instabilité τ_{FR} des arcs coïncide avec la micro limite élastique difficile à mesurer car correspondant à de très faibles déformations.

Puis, au fur et à mesure que τ croît, la densité ρ_D des dislocations augmente et la forêt devient de plus en plus dense provoquant un fort durcissement. Les lignes de glissement se raccourcissent mais leur distance diminue également. Comme les distances entre points d'ancrage sont distribuées statistiquement il existe des zones dures aux endroits où la forêt est plus *touffue*. Lorsqu'une dislocation glisse dans une telle forêt elle abandonne des boucles de dislocation autour des zones dures. Le passage des dislocations successives provoque donc la création d'écheveaux de dislocations *fortement stabilisés*. La

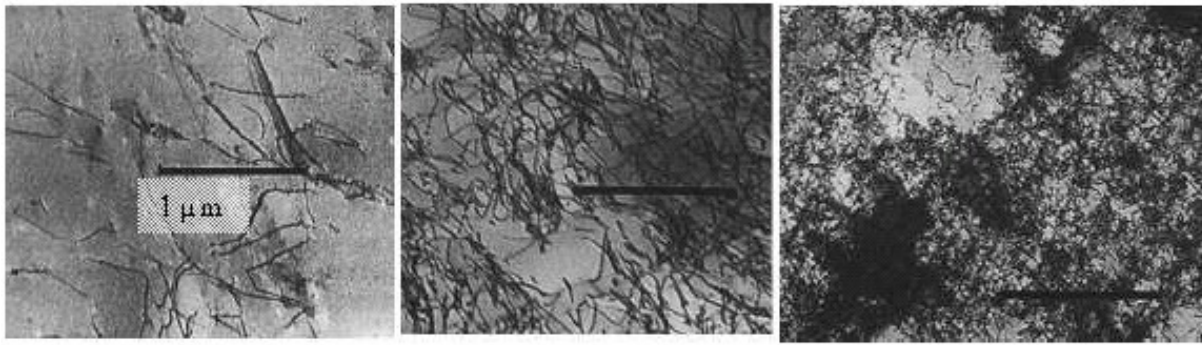


FIG. 4.39 – Dislocations dans un alliage hastalloy : Recuit, Ecoui, Ecoui à 15% avec formation d'amas (photos CEA.SRMA)

résistance au mouvement des dislocations correspond à la contrainte nécessaire pour franchir les espaces plus *clairsemés*. Les passages entre zones dures se bouchent progressivement par l'accumulation des boucles conduisant au durcissement d'*écrouissage*. L'*écrouissage* est un mode de durcissement très utilisé (tubes de *Cu*, fil étiré, acier de précontrainte,...).

- *Restauration*

Si l'*écrouissage* est trop important il empêche la poursuite des opérations de corroyage et peut même provoquer des *ruptures*, le réseau de Frank étant quasi complètement figé. Pour rétablir la ductilité il faut débloquent les dislocations en forçant des mouvements en dehors des plans de glissements. Pour ce faire il faut permettre aux atomes et aux lacunes de diffuser au sein du matériau ce qui implique une activation thermique forte, c'est l'opération de *recuit* au cours de laquelle les dislocations voisines de signes opposés, comme celles formant des dipôles, vont s'annihiler tandis que les dislocations de même signe vont se placer les unes près des autres afin de minimiser leur énergie d'interaction. La *montée*, rendue possible par la migration de lacunes jusqu'au cœur des dislocations les amènent à égale distance les unes des autres, formant des parois de dislocations qui introduisent une désorientation et qui partagent les grains en sous grains, c'est la *polygonisation*. Puis certains sous grains vont croître au dépens des autres, formant les germes de grains nouveaux, c'est la *recristallisation*. On aboutit finalement à une structure nouvelle de grains qui ont retrouvés une faible densité de dislocation et donc, par abaissement de la dureté, une nouvelle capacité à subir un corroyage par *écrouissage*. La *taille* des grains recristallisés est fonction *croissante* de la température de *recuit* et *décroissante* de l'*écrouissage* préalable. Pour que la recristallisation ait lieu, il faut que l'*écrouissage* préalable ait dépassé un seuil critique. C'est tout l'art du forgeron qui alterne *écrouissage* mécanique et *recuit* de restauration.

Résistance des joints de grain

Les matériaux polycristallins sont formés de grains possédant des orientations cristallographiques différentes séparées par des joints de grains. Quand la contrainte appliquée τ dépasse la résistance interne τ_{PN} de frottement du réseau le glissement des dislocations s'amorce dans les grains possédant les plans de glissement d'orientation la plus favorable par rapport au cisaillement imposé. Puis, lorsque $\tau - \tau_{PN}$ atteint la valeur critique d'activation τ_{FR} , les sources de dislocations émettent des boucles qui viennent se bloquer sur les joints de grains formant des empilements jusqu'à ce que la force en retour exercée sur la source l'empêche de fonctionner. Une fois bloquées les premières sources actives l'augmentation de τ déclenche des glissements dans des grains moins favorablement orientés. Comme les empilements de dislocations créent des concentrations de contrainte aux joints de grain, celles-ci peuvent à leur tour activer les sources proches des joints dans les grains voisins. Les dislocations émises par les sources proches des joints traversent alors les grains et viennent buter sur les joints des grains suivants. La distance entre empilements est alors de l'ordre de la taille d du grain. De proche en proche la propagation des glissements passe ainsi de grain en grain.

La loi d'évolution $\tau_Y = \tau_{PN} + k_Y \frac{1}{\sqrt{d}}$ de la résistance au cisaillement τ_Y d'un grain établie par

Hall et Petch est bien confirmée expérimentalement. La contrainte $\tau_Y = \tau_{PN} + \mu b \sqrt{\rho_D}$ à appliquer pour obtenir une déformation γ étant la somme de la contrainte seuil initial τ_{PN} de résistance du réseau atomique et de la contrainte de durcissement d'écrouissage $\mu b \sqrt{\rho_D}$, comme γ est lié à ρ_D par $\gamma = b l_D \rho_D$ et la distance moyenne l_D parcourue par les dislocations est proportionnelle à la taille d du grain, le facteur de Petch k_Y varie comme $\sqrt{\gamma}$. A même niveau d'écrouissage γ , la résistance au cisaillement sera d'autant plus élevée que le grain est petit.

La relation de Hall-Petch établie au niveau du grain se généralise et s'applique à la limite d'élasticité R_P du polycristal :

$$R_P = \sigma_I + k_Y \frac{1}{\sqrt{d}} \quad (4.18)$$

σ_I étant lié à la contrainte seuil de glissement des dislocations (limite élastique initiale) et le facteur de Petch k_Y à la contrainte d'activation des sources (écrouissage). Si la contrainte interne σ_I dépend fortement de la température, le facteur de Petch k_Y n'en dépend pas.

4.5.5 Obstacles externes au mouvement des dislocations

Les mécanismes intrinsèques de durcissement permettent d'agir sur la dureté des *corps purs*. Mais pour agir sur les propriétés mécaniques il faut plus de souplesse. Pour ce faire il suffit de combiner traitements thermiques, irradiation,... et introduction d'atomes étrangers sous forme de solution solide, de précipités ou d'inclusions, c'est à dire employer des *alliages*.

Durcissement de solution solide

Les impuretés peuvent se mettre en solution dans un métal solide. Par exemple dans le *laiton*, alliage de *Cu* et de *Zn*, les atomes de *Zn* de rayon $a_0 + \Delta a_0$ remplacent des atomes de *Cu* de rayon a_0 pour former une solution solide de substitution désordonnée. A l'ambiante le *Cu* peut dissoudre jusqu'à 30% de *Zn*. Les atomes de *Zn* étant plus gros que ceux du *Cu* leur substitution dans le réseau du *Cu* crée des dilatations locales du réseau cristallin.

Une dislocation *Coin* aura donc tendance à se positionner au voisinage des atomes de *Zn* qui dilatent le réseau pour diminuer son énergie. Ce faisant, elle s'allonge ce qui a pour effet d'augmenter son énergie. De ce fait, la dislocation adopte une position d'équilibre forme des zigzags aplatis entre les atomes de soluté qui se trouvent dans son plan de glissement, tout en restant proche d'une ligne droite moyenne.

Ces *piégeages* au voisinage des atomes de soluté rendent rugueux le plan de glissement augmentant la résistance au mouvement des dislocations, franchissement d'une barrière énergétique pour décrocher d'un atome de soluté afin de s'accrocher à un autre. Le durcissement par les solutions solides conduit à une augmentation de la résistance au mouvement des dislocations dont la contrainte critique varie *approximativement en racine carrée de la concentration en soluté*.

Cependant ce mode de durcissement, efficace à l'ambiante pour de nombreux alliages métalliques comme le laiton monphasé, les bronzes, les aciers inoxydables,... perd rapidement de son efficacité avec l'augmentation de la température qui autorise la diffusion des atomes de soluté libérant le mouvement des dislocations et provoquant le fluage.

Durcissement par les précipités

Une manière très efficace de durcir une matrice métal ou céramique est d'y introduire des précipités d'une seconde phase. La plupart des aciers sont durcis par des précipités de carbures ainsi obtenus. C'est aussi le cas typique des alliages d'aluminium *Al - Cu* comme *AU4G* connu sous le nom de duralumin pour rappeler son fort durcissement par rapport à *Al*.

De petites particules peuvent également être introduites dans des métaux ou céramiques par d'autres moyens. Le plus simple est de mêler un dispersoïde (un oxyde par exemple) dans un métal en poudre (c'est le cas pour le plomb ou l'aluminium) puis de compacter et de fritter le mélange des poudres.

Les deux moyens conduisent à des particules *petites* et *dures* sur la trajectoire des dislocations. Les précipités cohérents avec le réseau de la matrice seront franchis par cisaillement. Par contre,

les dislocations ne peuvent pas pénétrer dans les précipités incohérents, elles doivent les contourner, abandonnant des boucles qui entourent les précipités.

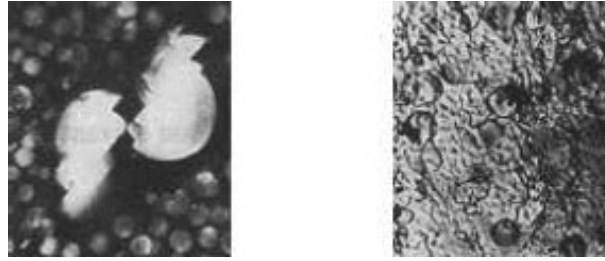


FIG. 4.40 – De gauche à droite : Cisaillement d'un précipité dans super alliage à base de *Ni* - Boucles de dislocations laissées autour des précipités par leur contournement dans un alliage à base de *Ni* sollicité de manière cyclique. *photos M. Clavel*

- Contournement d'un précipité

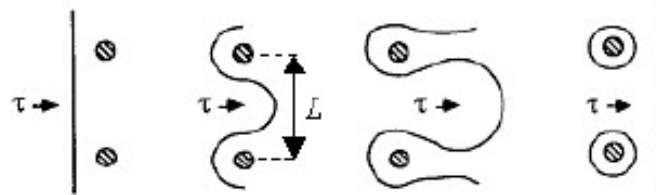


FIG. 4.41 – Contournement d'un précipité par une dislocation et abandon d'une boucle

Le contournement s'effectue selon le mécanisme d'Orowan, analogue à celui de la source de Frank-Read, en laissant une boucle de dislocation autour de chaque précipité. La contrainte critique :

$$\tau_{OR} = \frac{\mu b}{L - 2R} \quad (4.19)$$

est donnée par la formule de Frank-Read (Cf. Eq. 4.16) à condition de remplacer L par $L - 2R$, R étant le rayon du précipité dans le plan de glissement de la dislocation.

La contrainte τ_C nécessaire faire avancer la dislocation par contournement des obstacles est élevée. Pour s'en convaincre, utilisons l'analogie du gonflage d'un ballon de baudruche dans une cage à oiseaux, les barreaux représentent les obstacles. Il faut exercer une forte pression pour que le ballon déborde des barreaux, mais quand cela s'est produit il n'y a plus de difficulté à poursuivre son gonflage.

Dans tous les cas la contrainte critique augmente lorsque diminue la distance entre précipités. Le **durcissement maximal** est produit par des précipités *durs* et *rapprochés*.

4.5.6 Vers la plasticité macroscopique

La courbe de consolidation du monocristal

La limite d'écoulement $\tau_Y = \text{Max}\{\tau_{PN}, \tau_{SS}, \tau_{PP}\} + \mu b \sqrt{\rho}$ résulte des diverses contributions à la résistance à l'avancement des dislocations :

- La force de Peierls-Nabarro σ_{PN} traduisant la résistance des liaisons du réseau.
- Le durcissement de solution solide σ_{SS} .
- Le durcissement des précipités ou des particules σ_{PP} .
- Le durcissement d'écrouissage $\alpha \mu b \sqrt{\rho}$

Le monocristal

Critère de plasticité L'écoulement plastique se produit à partir de la multiplication et du déplacement collectif irréversible d'un nombre suffisant de dislocations. Quel que soit le mécanisme considéré

(multiplication, franchissement d'obstacles...), une force suffisante, la composante $F_{\perp} = \tau b$ de la force de Peach-Koehler, doit s'exercer sur les dislocations. Avec $\vec{\nu}$ normale au plan de glissement, \vec{n} direction de glissement dans ce plan, $\bar{\sigma}$ contrainte appliquée et τ_C la cission critique le critère de plasticité se met sous la forme $f(\bar{\sigma}) = |\vec{n}\bar{\sigma}\vec{\nu}| - \tau_C$ pour chaque famille de dislocations considérée. A *basse température* seul un petit nombre de systèmes de glissement (plans et directions de glissement dans ces plans), dits systèmes de *glissement facile*, cristallographiquement déterminés, sont susceptibles d'être *activés plastiquement*. A chaque système de glissement facile est associé son propre critère $f(\bar{\sigma})$ et donc sa propre cission réduite critique τ_C , le cristal ne pouvant se déformer plastiquement que lorsque l'état de contrainte $\bar{\sigma}$ permet d'annuler l'une des fonctions de charge (ou plusieurs simultanément), les autres restant négatives. Dans l'espace des contraintes la surface de charge ou critère du monocristal a la forme d'un hyperpolyèdre.

Loi d'écrouissage Les cissions réduites critiques τ_C jouent le rôle de paramètres d'écrouissage dont il faut préciser l'évolution au cours de l'écoulement plastique. Ceci conduit à définir d'autres paramètres physiques d'écrouissage dont dépendent les cissions. Compte tenu du rôle majeur des interactions entre dislocations dans l'écrouissage des métaux purs, il est logique de chercher à relier les cissions réduites critiques aux densités de dislocations présentes dans l'élément de volume considéré. Le modèle d'interactions du réseau de Franck conduit à une loi d'écrouissage *isotrope* $\tau_C = \mu b \sqrt{\rho_D}$. D'autres relations peuvent être étudiées pour traduire des cinématiques d'écrouissage plus complexes. Il reste alors à exprimer les lois d'évolution des densités ρ_D , mais il est très difficile d'aboutir à des expressions suffisamment générales.

Loi d'écoulement plastique Les relations entre taux de déformation plastique et taux de contrainte présentent le même genre de difficultés.

D'un point de vue purement cinématique, il faut remplacer la relation scalaire d'Orowan $\dot{\gamma} = \rho_m b v$, (ρ_m étant la densité de dislocations mobiles et v leur vitesse moyenne), par une relation vectorielle donnant la vitesse de déplacement relatif de deux plans cristallographiques de la même famille, puis généraliser à l'ensemble des systèmes de glissement.

Mais, au-delà, il faut également préciser quelle est la fraction ρ_m de la densité totale de dislocations ρ qui est mobile sous le chargement actuel et quelle est son évolution en fonction de $\bar{\sigma}$ et préciser l'évolution de la vitesse moyenne de déplacement des dislocations.

Autant de problèmes qui, bien qu'ayant été traités dans de nombreux cas particuliers, n'ont pas aujourd'hui de réponse suffisamment générale pour garantir un passage explicite sur un large domaine de validité de l'échelle des défauts cristallins à celle du comportement global du monocristal.

Le polycristal

En plus des difficultés déjà évoquées pour le monocristal, la plasticité du polycristal présente de nouveaux degrés de complexité majoritairement liés à la présence des joints de grain qui constituent des structures complexes de défauts, rarement réductibles à de simples arrangements plans de dislocations. Leur influence sur le comportement plastique du polycristal s'exerce à plusieurs niveaux :

- Au niveau *microscopique*, cette influence est déterminée par la nature des interactions entre dislocations de réseau et défauts constituant le joint. Aux effets de force-image s'ajoutent des effets d'obstacle à la propagation des dislocations responsables de la formation d'empilements et de concentrations de contraintes susceptibles d'activer dans les grains voisins des sources de dislocations assurant la transmission de l'écoulement plastique de grain à grain. Le joint de grain (site privilégié de ségrégation d'impuretés, de précipitation, ...) agit également de manière plus complexe, aussi bien comme source que comme puits de dislocations.

- A un niveau *intermédiaire*, le joint est responsable de la formation, dans son voisinage, d'une zone cristalline riche en défauts en moyenne plus écrouie que l'intérieur des grains. En découle une hétérogénéité de comportement du grain partagé en domaines plus ou moins écrouis qui font du grain lui-même une structure complexe dont le comportement moyen est, du fait de la non-linéarité de la plasticité, fort éloigné de celui du monocristal isolé.

• Enfin, à un niveau *macroscopique*, le joint de grains intervient comme frontière entre deux cristaux d'orientations différentes. Même si chaque grain est déformé plastiquement de manière uniforme la déformation plastique n'est plus globalement compatible. Il en résulte un champ de contraintes internes qui conduit à des fluctuations importantes de la contrainte locale d'un grain à l'autre, ne redonnant qu'en moyenne les contraintes appliquées à l'élément polycristallin.

Au-delà de l'effet individuel des joints de grains, le comportement global du polycristal est déterminé par la distribution d'ensemble des joints (position, orientation, dimensions), régissant les formes et les tailles des grains mais aussi par les orientations cristallines propres à chaque grain et leur évolution au cours de l'écoulement. Pour analyser précisément ces différents paramètres et leur influence il ne suffit pas d'avoir connaissance de leurs probabilités, il faut encore connaître leur distribution spatiale, la réponse d'un grain donné dépendant aussi des détails de son voisinage, orientation, forme et dimensions de ses proches voisins, voire de grains plus éloignés qui interagissent à distance avec lui.

Le passage micro-macro

Comparée à l'approche macroscopique purement phénoménologique dans laquelle les paramètres d'écrouissage sont des variables *cachées* sans signification physique établie, la compréhension des mécanismes aux échelles micro et mésoscopiques qui décrit les paramètres les plus importants de l'agrégat polycristallin (texture cristallographique ou morphologique) et traite le polycristal comme un matériau composite incomplètement décrit de manière statistique, permet de préciser la nature *physique* de l'écrouissage et de la résistance plastique.

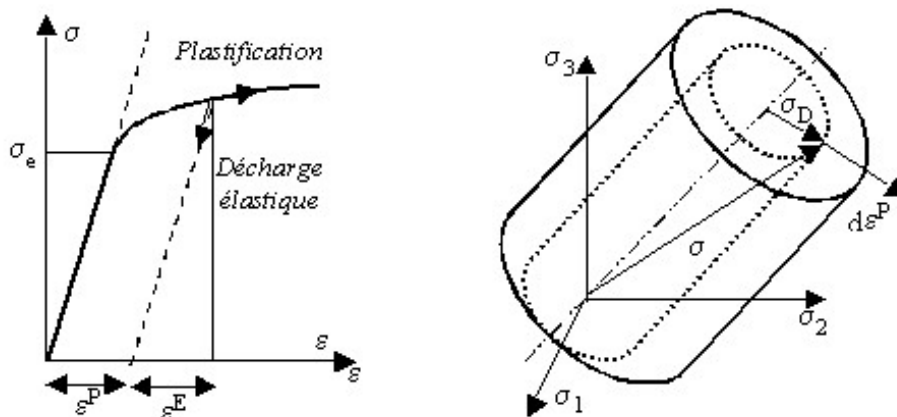
Bien que l'étude des mécanismes physiques à l'origine de la plasticité macroscopique ne permette pas, en l'état actuel des connaissances, d'assurer le passage complet du comportement *microscopique* au comportement *macroscopique*, elle n'en reste pas moins un guide précieux pour l'élaboration des matériaux destinés à résister aux déformations plastiques.

4.6 Résumé Plasticité

Seuil de Plasticité

$$\begin{array}{ll} \text{Elasticité} & \varepsilon = \varepsilon^E \quad \text{si } \sigma \leq \sigma_e \\ \text{Plasticité} & \varepsilon = \varepsilon^E + \varepsilon^P \quad \text{si } \sigma > \sigma_e \end{array}$$

Au delà de la limite élastique, chaque point de la courbe de charge est un point de bifurcation. La



plastification s'effectue par changement de forme à **volume constant** et ne dépend que du déviateur des contraintes $\bar{\sigma}_D$. Cela correspond à une **résistance limite du matériau au cisaillement**.

Métaux ductiles

Dans l'espace des contraintes, le critère de plasticité ou surface de charge $f(\bar{\sigma}) = 0$ définit la limite élastique écrouie pour un état de chargement donné. Dans le cas des métaux, la surface de charge est

bien représentée par le cylindre de Von Misès.

Pour un écrouissage isotrope (dilatation du cylindre au cours de la plastification), l'écoulement plastique s'effectue normalement à cette surface et l'incrément de déformation plastique $d\bar{\varepsilon}^P$ a mêmes directions propres que le déviateur $\bar{\sigma}_D$ des contraintes appliquées.

Pour une déformation simple (trajet radial dans l'espace des contraintes conservant les directions propres de $\bar{\sigma}_D$), il existe une relation biunivoque entre $\bar{\sigma}_D$ et la déformation plastique cumulée $\bar{\varepsilon}^P$ qui admettent mêmes directions principales.

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_D \quad \sigma_d &= \sqrt{\frac{\text{Tr}(\bar{\sigma}_D^2)}{3}} \quad \sigma_I = \sqrt{\frac{3}{2} \text{Tr}(\bar{\sigma}_D^2)} = \frac{3}{\sqrt{2}} \sigma_d \\ \bar{\varepsilon}^P = \bar{\varepsilon}_D \quad \varepsilon_d &= \sqrt{\frac{\text{Tr}(\bar{\varepsilon}_D^2)}{3}} \quad \varepsilon_I = \sqrt{\frac{2}{3} \text{Tr}(\bar{\varepsilon}_D^2)} = \sqrt{2} \varepsilon_d \\ \bar{\pi}_\sigma = \bar{\pi}_\varepsilon \quad \bar{\varepsilon}^P &= \frac{3}{2} \frac{\varepsilon_I}{\sigma_I} \bar{\sigma}_D \quad \varepsilon_I = \varphi(\sigma_I) \end{aligned}$$

Toute sollicitation complexe $\bar{\sigma}_D, \bar{\varepsilon}^P$ se ramène à une sollicitation de traction équivalente caractérisée par la contrainte vraie σ_I intensité des contrainte ou contrainte équivalente au sens de Von Misès et l'intensité ε_I de la déformation plastique cumulée.

Au delà de la limite élastique, la loi de Hollomon

$$\sigma_I = A \varepsilon_I^\chi \quad 0 \leq \chi < 1$$

décrit l'écrouissage des métaux ductiles.

Travail élasto-plastique

Pour effectuer un changement de forme irréversible à volume constant, il faut *dépenser* un travail plastique :

$$W^P = \int_0^{\varepsilon_I} \sigma_I d\varepsilon_I - \frac{1}{6G} \sigma_I^2$$

Ce travail est *dépensé* sous forme de chaleur (pertes plastiques) et d'énergie élastique de contention (*bloquée non récupérable*).

Chapitre 5

RUPTURE

Lorsqu'un matériau est sollicité jusqu'à rupture, les essais montrent que la contrainte de rupture σ_R est une grandeur présentant de fortes fluctuations pouvant même dépasser la décade pour certains matériaux et que le mode de ruine dépend de la nature du matériau. Ainsi la rupture peut intervenir brutalement quasi sans déformation préalable pour les matériaux qualifiés aujourd'hui de *fragiles*, tandis qu'elle n'intervient qu'après une étape de grande déformation permanente pour les matériaux qualifiés aujourd'hui de *ductiles*. Nous savons maintenant que les matériaux fragiles rompent brutalement au delà d'une certaine tension, tandis que les matériaux *ductiles s'écoulent plastiquement sous cisaillement avant de rompre*. Si la rupture est toujours l'étape ultime de la ruine des structures, elle est précédée d'une étape de plastification pour les matériaux ductiles. Ce document traitera principalement de la rupture *fragile au sens macroscopique* d'un matériau, c'est à dire une rupture intervenant sans plastification macroscopique notable, ce qui n'exclut pas une plastification microscopique en tête de fissure.

La mécanique de la rupture a pour objet l'étude des *fissures macroscopiques*, la détermination des champ des contraintes et de déformations correspondants et l'établissement des données expérimentales permettant de déterminer la cinétique de propagation des défauts et leur taille critique au-delà de laquelle, pour une sollicitation donnée, la rupture instable se produit. Le développement théorique de la mécanique de la rupture, important depuis les années 1960, doit beaucoup aux progrès réalisés conjointement dans la mise au point des *méthodes de contrôle non destructif*.

Contrainte critique et taille critique de défaut

Rupture brutale La sollicitation croissante d'une pièce comportant une fissure de longueur a_C se traduit dans une première étape (étape d'*ouverture*) par un écartement progressif des lèvres du défaut. Lorsque la contrainte appliquée σ atteint une valeur critique $\sigma_C(a_C)$ d'autant plus faible que la taille a_C du défaut est grande, la fissure s'allonge rapidement (étape de *propagation*) ce qui conduit *brutalement* à la rupture de la pièce.

Rupture de fatigue Lorsque la sollicitation est une fonction du temps t (corrosion sous contrainte, fluage en température) ou du nombre de cycles N (fatigue cyclique), la taille a_C de la fissure augmente progressivement et, lorsque la contrainte critique $\sigma_C(a_C)$ atteint la valeur de la contrainte appliquée σ , la pièce rompt brutalement. Ce mécanisme de fatigue par croissance de la taille du défaut produit une rupture brutale différée au bout d'un temps $t_R(\sigma)$ (ou d'un nombre de cycle $N_R(\sigma)$).

La figure 5.1 décrit le schéma de principe illustrant la variation de la dimension a d'une fissure avec le nombre de cycles N , en fatigue, ou le temps t , en corrosion sous contrainte ou en fluage, et la taille de défaut critique a_C à rupture, pour une sollicitation donnée. La taille a du défaut croît avec N ou t tandis que la contrainte de rupture σ_R décroît. Pour un défaut de taille $a = a_C$ donnée, il existe donc une contrainte critique $\sigma_C = \sigma(a_C)$ provoquant la rupture. Réciproquement, pour une contrainte $\sigma = \sigma_C$ donnée, il existe une taille maximale de défaut admissible $a_C = a(\sigma_C)$ pour que la structure ne casse pas.

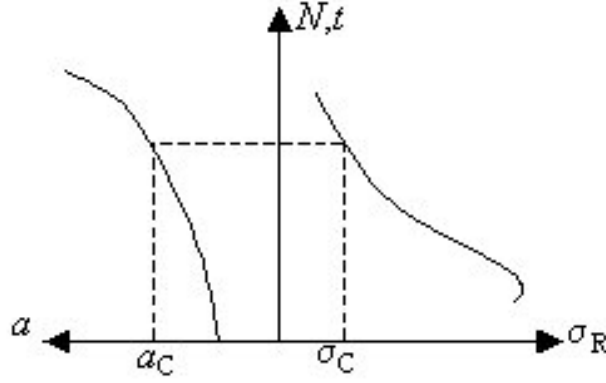


FIG. 5.1 – Principe de la rupture différée

5.1 Résistance théorique à la rupture

5.1.1 La contrainte théorique de clivage

L'énergie interne d'un monocristal est une fonction périodique de la distance atomique a . Au repos les atomes occupent les positions d'énergie minimale. Tant que la contrainte de traction σ appliquée perpendiculairement au plan atomique reste faible sa suppression entraîne le retour en position d'énergie minimale, le comportement est *élastique*. Au delà d'un certain seuil de traction σ_{th} correspondant au franchissement du col énergétique la séparation intervient par *clivage*, rupture de l'ensemble des liaisons chimiques entre les atomes de deux plans adjacents.

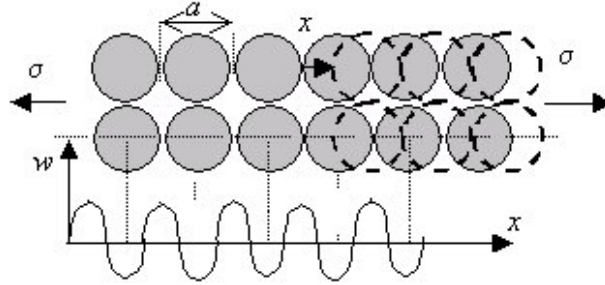


FIG. 5.2 – Contrainte théorique de clivage

La contrainte σ étant la dérivée de l'énergie par rapport à l'extension, elle oscille avec la même période a distance interatomique. Au premier ordre du développement en série de Fourier la contrainte σ s'écrit :

$$\sigma = \sigma_{th} \sin \frac{2\pi}{a} x = \sigma_{th} \sin 2\pi \varepsilon \quad \sigma \simeq 2\pi \sigma_{th} \varepsilon \text{ lorsque } \varepsilon \rightarrow 0$$

x étant le déplacement d'une moitié du cristal par rapport à l'autre. Aux faibles déformations l'identification avec la loi de Hooke $\sigma = E\varepsilon$ permet de relier raideur et résistance par :

$$\sigma_{th} = \frac{E}{2\pi} \quad \sigma_{th} \approx \frac{E}{10}$$

ordre de grandeur confirmé par la théorie des énergies de liaison (Cf. Eq. 1.2 et Fig. 1.3).

Les liaisons chimiques étant responsable de la cohésion du matériau à l'échelle atomique il est normal de trouver une relation entre la raideur E (Module d'Young) et la résistance en traction σ_{th} (contrainte de rupture).

5.1.2 L'énergie superficielle des solides

Le clivage crée deux nouvelles surfaces dont les atomes voient leur environnement modifié, ils n'ont plus autant de proches voisins que les atomes en volume. Il en résulte, comme pour les liquides, une tension de surface donc une énergie superficielle γ . L'énergie de séparation W^S à fournir pour créer par clivage les deux nouvelles surfaces d'aire S est $W^S = 2\gamma S$.

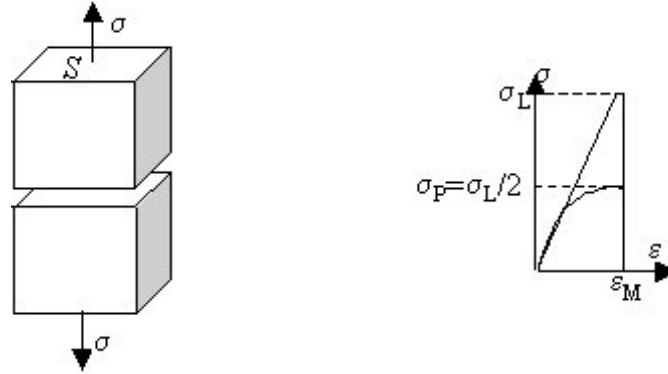


FIG. 5.3 – Énergie superficielle et contrainte théorique de clivage

Supposant, avec Griffith, que l'énergie élastique mobilisable pour assurer le clivage est celle stockée au voisinage du plan de séparation dans un volume $V = Sa$, S étant l'aire de clivage et a la distance interatomique. $\frac{1}{2}\sigma\varepsilon = \frac{1}{2E}\sigma^2$ étant la densité volumique d'énergie élastique stockée, l'énergie mobilisable est $W^{El} = \frac{1}{2E}\sigma^2 Sa$. Le clivage intervient donc pour une contrainte σ_{th} telle que $W^{El} = W^S$, soit $a\sigma_{th}^2 = 4\gamma E$. Dans l'établissement de cette relation on suppose que les liaisons atomiques continuent d'obéir à la loi de Hooke jusqu'à rupture. Ce n'est pas le cas, la courbe force de rappel - écart à la position d'équilibre déduite du potentiel de Lennard-Jones s'écarte de la loi linéaire d'une manière approximativement parabolique, la force croissant moins vite que l'écart. Compte tenu de la propriété géométrique des paraboles, la contrainte maximale calculée par la loi linéaire est surestimée d'un facteur 2, ainsi la relation :

$$\sigma_{th} = \sqrt{\frac{\gamma E}{a}}$$

est une bonne approximation de la résistance théorique à la rupture en traction de la plupart des solides.

En rapprochant les deux expressions de $\sigma_{th} = \frac{E}{2\pi}$ et $\sigma_{th} = \sqrt{\frac{\gamma E}{a}}$, γ , E et a sont liés par :

$$4\pi^2\gamma = Ea \quad (5.1)$$

5.1.3 L'effet d'échelle

Dans les solides cristallins la structure moléculaire se réarrange complètement au moment de la solidification et les tensions superficielles mesurées en phase liquide ne permettent pas nécessairement d'en déduire l'énergie de surface de l'état solide. En revanche, le verre n'est généralement pas cristallisé lorsqu'il se solidifie à partir d'un état liquide ou pâteux ; sa structure moléculaire n'est pas sensiblement modifiée. L'extrapolation à 15°C des mesures de la tension superficielle du verre à des températures comprises entre 745°C et 1110°C donne pour le verre solide une énergie de surface $\gamma = 0,56 \text{ N.m}^{-1} = 0,56 \text{ J.m}^{-2}$. Le module d'Young E du verre ordinaire est d'environ 62000 MPa. La résistance théorique à la traction du verre est, selon le mode de calcul, $\sigma_{th} = \frac{E}{2\pi} = 10^4 \text{ MPa}$ ou $\sigma_{th} = \sqrt{\frac{\gamma E}{a}} = 1,3 \cdot 10^4 \text{ MPa}$ avec a de l'ordre de 2\AA ($2 \cdot 10^{-10} \text{ m}$).

La contrainte de rupture en traction de baguettes de verre d'environ 1 mm de diamètre est de l'ordre de 170 MPa, valeur près de 100 fois plus faible que la valeur calculée. Cependant, une diminution du diamètre augmente la contrainte de rupture et les fibres les plus fines, les whiskers, ont une contrainte de

rupture dépassant 13600 MPa, correspondant parfaitement à la prévision théorique. Cet effet d'échelle n'est pas l'apanage du verre et la contrainte de rupture théorique n'est pas une abstraction scientifique on sait l'atteindre ou s'en approcher en laboratoire pour la quasi-totalité des matériaux.

Matériaux	γ (J.m ⁻²)	E (Gpa)	σ_{th} (Gpa)
Fer	2,0	210	46
Cuivre	1,65	120	31
Zinc	0,75	90	18
Aluminium	0,90	73	18
Tungstène	3,0	360	73
Diamant	5,4	1200	180
Chlorure de sodium	0,115	43	6,2
Oxyde d'aluminium	4,6	420	67
Verre ordinaire	0,54	70	14

TAB. 5.1 – Énergie superficielle, Module d'Young et Résistance théorique

La résistance *effective* à la rupture σ_R des matériaux massifs de nos structures est 10 à 100 fois plus faible que la contrainte de cohésion σ_{th} de la matière (somme des forces de liaison de la section la plus faible).

Bien que sa valeur moyenne soit fonction décroissante de la taille de l'échantillon, σ_R présente toujours une grande dispersion quel que soit le soin pris pour opérer sur des échantillons identiques dans des conditions identiques. Une chaîne de molécules devrait présenter une résistance effective égale à la résistance théorique, ce sont les inévitables défauts qui sont responsables des effets d'échelle et de dispersion. Du fait de leur répartition statistique plus un échantillon est volumineux et plus les défauts qu'il contient peuvent être de taille importante diminuant sa résistance à la rupture.

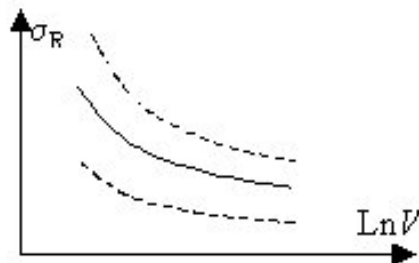


FIG. 5.4 – dispersion de la contrainte de rupture et effet d'échelle

Deux théories, l'une fondée sur des considérations de forces et de contraintes, l'autre due à Griffith fondée sur des bilans énergétiques, ont permis de jeter les bases de la mécanique de la rupture et sont à l'origine de son développement. Les arguments fondés sur l'énergie sont les plus importants, les plus fondamentaux et les plus universels, mais commençons par exposer les arguments fondés sur les forces et les contraintes.

5.2 Approche en force et en contrainte

Les variations locales de géométrie d'une structure sous sollicitation peuvent conduire à une *amplification locale du champ de contrainte* par rapport à sa valeur moyenne, c'est la notion de *concentration des contraintes*. Toute variation brutale de section amplifie localement les contraintes entraînant un affaiblissement corrélatif de la structure, mais l'introduction de *trous*, d'*encoches* ou de *fissures* est particulièrement *néfaste*.

Il est instructif d'étudier le réseau des isostatiques, trajectoires le long desquelles se transmet la contrainte dans la masse d'un corps solide supportant une charge. Analogues des lignes de courant en hydrodynamique elles mettent en évidence les difficultés d'*écoulement* des contraintes.

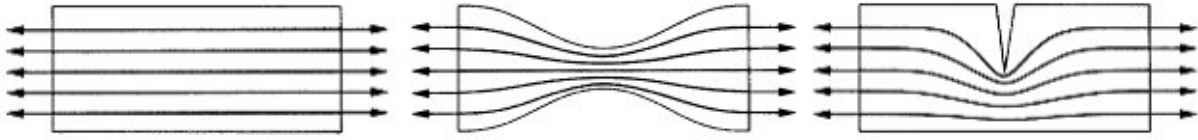


FIG. 5.5 – Variations locales de géométrie et concentration des contraintes

Dans une plaque uniforme soumise à traction uniaxiale, les isostatiques sont parallèles, l'écoulement est *laminaire*.

Si la pièce comporte un étranglement symétrique et progressif, les isostatiques se resserrent dans la partie étroite et le niveau de contrainte augmente à cet endroit, c'est l'analogie de l'augmentation de vitesse par conservation du débit.

Les isostatiques se concentrent à la pointe d'une rayure ou d'une fissure accroissant très fortement l'intensité de la contrainte locale de manière analogue au contournement d'une plaque perpendiculaire à l'écoulement. La rupture qui intervient le long de la rayure est exploitée par le vitrier pour couper le verre.

5.2.1 Le coefficient de concentration des contraintes

La présence d'un trou de petite taille dans une plaque en traction uniforme produit une concentration de la contrainte *localisée* au bord du trou caractérisée par le *coefficient de concentration de contrainte* k rapport de la contrainte locale σ_m à la contrainte σ_0 appliquée au loin. Les résultats *principaux* du calcul du champ de contraintes (Inglis 1913) au voisinage d'un trou elliptique percé dans une plaque de taille grande devant ses dimensions, $2b$ et $2c$ étant le petit et le grand axe de l'ellipse, mise en traction perpendiculairement au grand axe sont regroupés sur la figure 5.6.

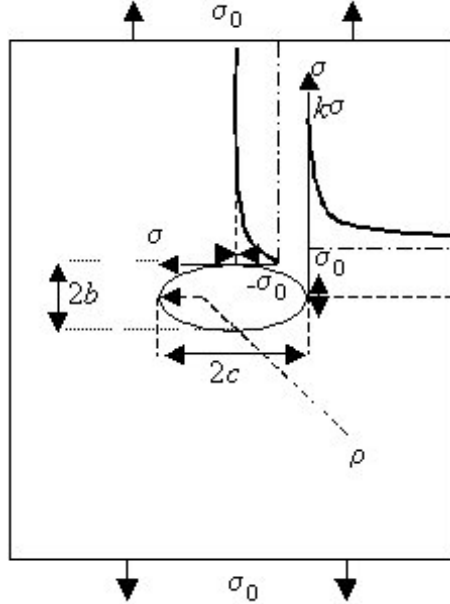


FIG. 5.6 – Concentration de contrainte autour d'un trou elliptique

Au voisinage des sommets du grand axe apparaît une forte concentration de la contrainte de *traction*. Sa valeur maximale σ_m en bord d'ellipse est à cet endroit $\frac{\sigma_m}{\sigma_0} = k = 1 + 2\frac{c}{b} = 1 + 2\sqrt{\frac{c}{\rho}}$, avec ρ rayon de courbure en extrémité du grand axe ($c\rho = b^2$). $k = 3$ dans le cas du trou circulaire ($b = c = \rho$). La contrainte de traction diminue pour tendre vers σ_0 lorsque l'on s'éloigne de l'ellipse le long du grand axe.

Aux sommets du petit axe $2b$ de l'ellipse, règne au contraire une contrainte de *compression*, d'amplitude σ_0 tendant à s'annuler lorsque l'on s'éloigne de l'ellipse le long du petit axe.

Si les trous elliptiques sont rarement rencontrés en pratique, la solution reste valable pour des ouvertures dont la forme en est peu éloignée telles que les fissures (ellipse aplatie) ou les ouvertures à angles assez vifs comme les hublots et les écoutilles. Le coefficient de concentration de contrainte k et, par voie de conséquence, la contrainte σ_m augmentent très rapidement avec l'aplatissement de l'ellipse de sorte que rapidement :

$$k \approx 2\frac{c}{b} = 2\sqrt{\frac{c}{\rho}} \quad (5.2)$$

5.2.2 La contrainte de rupture effective

Les matériaux fragiles renferment une multitude de fissures internes dont le rayon d'extrémité ρ , la fissure étant vue comme une ellipse très aplatie, est de l'ordre d'une dimension atomique a et la rupture intervient lorsqu'en tête de fissure la contrainte maximale locale σ_m atteint la valeur de la contrainte de rupture théorique en traction σ_{th} . Comme σ_m varie proportionnellement à la contrainte appliquée σ_0 , le facteur de proportionnalité étant justement le *coefficient de concentration de contrainte* $k \approx 2\sqrt{\frac{c}{\rho}}$, la contrainte de rupture effective σ_R : $\sigma_R = \frac{\sigma_{th}}{k}$ est très inférieure à la valeur théorique. a étant de l'ordre de 1\AA , un défaut *non visible* de taille caractéristique c $1\text{ }\mu\text{m}$ conduit à un facteur k de l'ordre de 10^2 correspondant bien à l'ordre de grandeur du rapport constaté expérimentalement.

Avec $\sigma_{th} = \sqrt{\frac{\gamma E}{a}}$, on obtient la relation de Griffith reliant la contrainte de rupture σ_R à la taille c du défaut :

$$\sigma_R^2 c \approx \gamma E \quad (5.3)$$

relation qui montre que la résistance effective à la rupture σ_R est liée à la taille du plus grand défaut existant justifiant à la fois la dispersion sur σ_R liée à la distribution des défauts et l'effet d'échelle puisque statistiquement plus le volume est grand et plus il contient de grands défauts.

5.3 La rupture fragile

A l'échelle macroscopique une fissure peut être considérée comme une ellipse de grand axe $2c$ dont le petit axe $2b$, donc le rayon ρ , tend vers 0. Dans ce cas, le coefficient de concentration de contrainte k diverge induisant une *discontinuité* et une *divergence* des contraintes en tête de fissure. La fissure doit alors être vue comme une discontinuité au sein d'un milieu continu.

5.3.1 Fissure et modes de rupture

La rupture est caractérisée (au moins localement) par la séparation irréversible (généralement les liaisons chimiques rompues ne se rétablissent pas par suite de la présence inévitable de polluant) d'un milieu continu de part et d'autre d'une surface génératrice S . La coupure ainsi créée est appelée *fissure*.

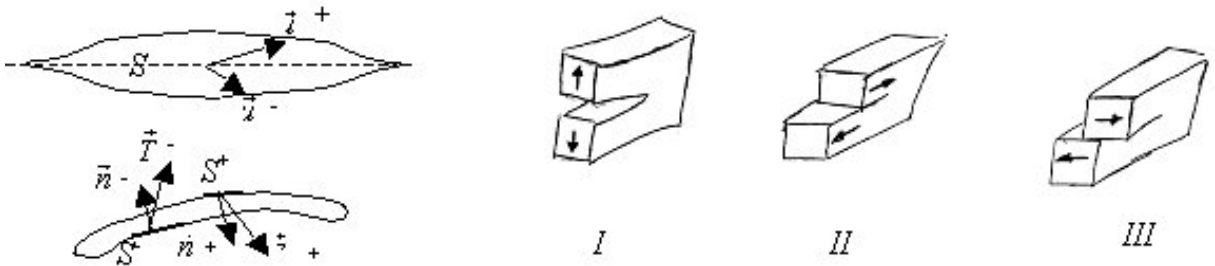


FIG. 5.7 – fissure et modes de rupture

C'est une surface de *discontinuité* pour le champ de *déplacement*. Le saut $[\vec{u}] = \vec{u}^+ - \vec{u}^-$ est le *déplacement d'ouverture* de la fissure.

Sa composante u_n normale à S est l'*ouverture*, écartement des lèvres de la fissure. Elle ne peut, à

l'évidence, être négative.

Sa composante tangentielle u_t est le *glissement relatif* des lèvres de la fissure.

Lorsque la séparation est *effective*, les lèvres sont *libres de charge* et les vecteurs contrainte des facettes de chaque lèvre s'annulent.

$$\vec{T} = \bar{\sigma} \vec{n} = 0$$

Cette condition n'est évidemment pas applicable aux fissures fermées qui imposent une condition de frottement entre les lèvres, comme cela se produit dans les roches sous pression.

On distingue trois modes de rupture :

- Le mode *I* appelé de manière évidente mode d'*ouverture*.
- Le mode *II* appelé mode de *glissement plan*.
- Le mode *III* appelé mode de *glissement antiplan* ou mode de *déchirure*, celui mobilisé lorsque l'on déchire une feuille de papier.

5.3.2 Les phases de chargement

Lors du chargement d'une pièce fissurée, on distingue deux phases :

La phase d'ouverture pendant laquelle, la fissure *immobile* s'ouvre, les lèvres s'écartant sans changement géométrique de la surface S . Cette phase se poursuit jusqu'à un chargement critique autorisant la fissure à se propager en s'agrandissant. A ce chargement critique correspond la condition d'*amorçage*.

La phase de propagation Au delà du chargement critique d'amorçage, la fissure s'agrandit (avance) soit dans le plan tangent à S soit dans d'autres directions (branchement), c'est la phase de *propagation* qui pourra être contrôlée (propagation dite *stable*) ou non (propagation dite *instable* conduisant à la rupture *brutale* ou *catastrophique*).



FIG. 5.8 – Ouverture et propagation d'une fissure

5.3.3 Les hypothèses du modèle de rupture fragile

- Le matériau est supposé *homogène, isotrope* à comportement *élastique linéaire* jusqu'à rupture. La courbe de traction de la structure macroscopique présente un comportement linéaire jusqu'à rupture ; On parle alors de *rupture fragile* à l'échelle *macroscopique* ce qui n'exclut pas l'existence d'une *ductilité* à plus petite échelle au voisinage de la fissure pour autant que la *plastification* reste strictement confinée au voisinage de la fissure.
- On néglige les forces de volume et les accélérations, la rupture dynamique étant exclue.
- On se restreint aux problèmes *bidimensionnels* (d'épaisseur e) en *contrainte plane* (cas des plaques minces) et en *déformation plane* (cas des plaques épaisses). L'origine O étant prise en tête de fissure, l'axe Ox_1 sera pris dans le prolongement de la fissure.

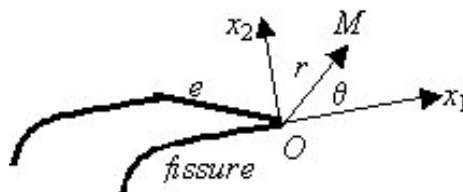


FIG. 5.9 – Ouverture et propagation d'une fissure

On s'attend donc à ce que le modèle présente une divergence des contraintes *physiquement sans signification* au voisinage de la tête de fissure, mais la solution représentera bien l'évolution spatiale du champ de contrainte induit par la fissure au delà d'un petit rayon r_0 .

5.3.4 Le modèle de rupture fragile

Le résultat *essentiel* en élasticité linéaire a été établi par Irwin. Le premier terme du développement limité du champ de contrainte au voisinage d'une fissure est le *même* pour *tous les problèmes* (chargement et géométrie de fissure) correspondant à un *mode d'ouverture donné*. Pour chaque mode, ce premier terme est connu à un facteur multiplicatif près noté K *facteur d'intensité de contrainte*. La solution d'un problème de fissure se ramène donc en élasticité linéaire à la détermination du facteur K *qui ne dépend que de la géométrie de la fissure et du type de chargement*. Dans un problème réel, la solution sera souvent une combinaison linéaire des trois modes, combinaison rendue possible en raison du principe de superposition des solutions en élasticité linéaire. Le mode I est cependant *physiquement* le mode le plus *important* puisque l'ouverture de la fissure conduit assez facilement à la rupture. Les autres modes ne sont pas toujours faciles à contrôler, en particulier en présence de frottement des lèvres. En *mode I* la fissure se propage dans son propre plan par raison de symétrie. On s'intéressera donc essentiellement au *mode I*.

$$\begin{array}{ll} \text{Champ de déplacement} & \text{Champ de contrainte} \\ \vec{u} = \frac{K}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \vec{f}(\kappa, \theta) & \bar{\sigma} = \frac{K}{\sqrt{2\pi r}} \bar{f}(\theta) \end{array} \quad (5.4)$$

η étant le coefficient de Poisson et μ le module de cisaillement, $\kappa = 3 - 4\eta$ en *déformation plane* et $\kappa = \frac{3-\eta}{1+\eta}$ en contrainte *plane*. $\sigma_{33} = \eta(\sigma_{11} + \sigma_{22})$ en *déformation plane* et $\sigma_{33} = 0$ en contrainte *plane*.

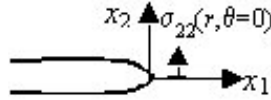


FIG. 5.10 – Traction en tête de fissure

Les *facteurs d'intensité de contraintes* sont aussi des *facteurs de discontinuité* des déplacements. Cette interprétation appliquée à K_I dégage une condition de compatibilité importante, n'apparaissant pas de façon évidente en terme de contrainte, à savoir $K_I \geq 0$. En conséquence la contrainte $\sigma_{22}(r, \theta = 0)$ juste en avant de la fissure est toujours ≥ 0 . En *mode I* la tête de fissure travaille toujours en *traction* (*travail à l'ouverture*). Il ne faut cependant pas oublier que ces champs correspondent seulement au premier terme du développement limité. Dès que l'on s'éloigne de la fissure, d'autres termes *réguliers* interviennent. On peut seulement affirmer qu'ils seront négligeables devant $\frac{1}{\sqrt{r}}$ lorsque $r \rightarrow 0$.

5.3.5 Coefficient de concentration k et facteur d'intensité K

Il est important de ne pas confondre le *coefficient de concentration de contrainte* k qui ne donne qu'une information locale à la pointe même de la fissure et le *facteur d'intensité de contrainte* K qui décrit l'ensemble de la singularité spatiale du champ de contrainte. Si k est sans dimension, K est le produit d'une contrainte par la racine carrée d'une longueur $[K] = [\sigma][L]^{1/2}$ et se mesure en $\text{MPa} \cdot \sqrt{\text{m}}$.

Le passage à la limite permettant de définir une fissure comme la limite d'un trou elliptique complètement aplati conduit naturellement à une relation entre les deux grandeurs, la longueur intervenant dans K étant reliée à la taille c du défaut par la relation d'Irwin :

$$K = \lim_{\rho \rightarrow 0} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sigma_m \sqrt{\rho}$$

σ_m étant la contrainte en tête de la fissure elliptique et ρ son rayon de courbure.

Pour une fissure elliptique aplatie de longueur $2c$ dans une plaque infinie (en pratique de dimensions grandes devant c) soumise à une traction σ , $\sigma_m = k\sigma$ avec $k = 2\sqrt{\frac{c}{\rho}}$, le passage à la limite conduit à $K_I = \sigma\sqrt{\pi c}$.

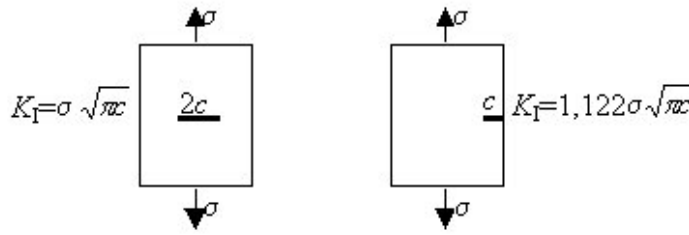


FIG. 5.11 – Facteur d'intensité de contrainte

Citons comme autre exemple le cas classique d'une fissure latérale de longueur c débouchant sur le côté d'une plaque semi infinie soumise à une traction homogène σ perpendiculaire à la fissure pour laquelle $K_I = 1,122\sigma\sqrt{\pi c} \approx 2\sigma\sqrt{c}$.

On retrouve bien le fait annoncé que K est une fonction du chargement et de la géométrie du problème. Les expressions de K pour diverses géométries et divers chargements sont tabulées dans les ouvrages spécialisés.

5.4 La correction d'élasto-plasticité

La solution élastique n'est pas *physiquement réaliste*. Les contraintes en tête de fissure sont *écrêtées* par la plasticité, particulièrement dans les métaux.

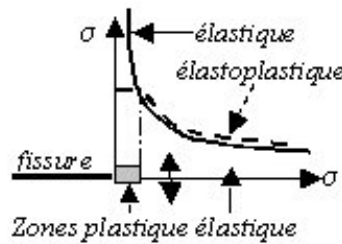


FIG. 5.12 – Correction d'élasto-plasticité

5.4.1 Autonomie de la zone critique

La divergence des contraintes en tête de fissure est physiquement sans signification. Au voisinage immédiat de la tête de fissure les contraintes seront au minimum *écrêtées* par l'apparition de déformations *plastiques*. Il existe en tête de fissure un domaine, de rayon r_0 caractéristique du matériau, dans lequel la dégradation est telle que toute description par une loi de comportement type milieu continu est illusoire. L'hypothèse de l'*autonomie de la zone critique*, sous-jacente à toutes les théories de la rupture fragile revient à admettre que la forme de la zone critique et les valeurs critiques des champs qui y règnent sont les mêmes pour chaque classe de matériaux quelle que soit la géométrie de la pièce et son chargement. A l'extérieur de cette zone les champs de contrainte correspondent pratiquement à ceux donnés par la théorie élastique.

L'état critique de la fissure (condition d'amorçage) sera réputé atteint lorsque les contraintes σ sur le cercle de rayon r_0 vérifieront certaines relations caractéristiques du matériau, le rayon r_0 étant lui-même une de ces caractéristiques. A l'appui de cette hypothèse, plusieurs solutions plastiques, dont celle de Rice dans laquelle le champ élastique à l'extérieur d'une zone plastique circulaire correspond bien à celui prévu par la théorie élastique à un léger décalage d'origine près.

5.4.2 Modèle d'Irwin en plasticité confinée

Le modèle d'Irwin s'applique aux conditions de contrainte plane. Le matériau est supposé être parfaitement plastique, sans consolidation et obéir au critère de Tresca $2k = R^P$, R^P étant la limite

élastique du matériau. La contrainte σ_{yy} qui s'applique sur le plan prolongeant la fissure est principale, constante dans la zone plastifiée et vaut R^P . En zone élastique la contrainte $\sigma_{yy} = \frac{K}{\sqrt{2\pi r}}$ dans le plan $\theta = 0$ atteint la limite R^P à une distance r_y telle que $r_y = \frac{1}{2\pi}(\frac{K}{R^P})^2$. En réalité, la zone déformée

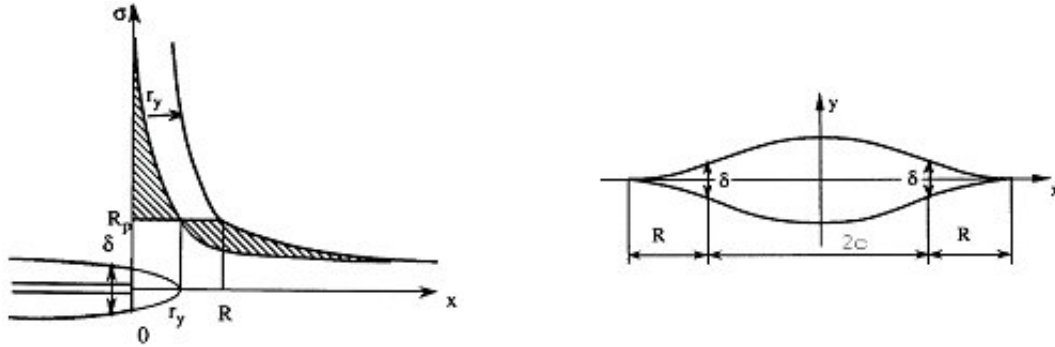


FIG. 5.13 – zone plastique d'Irwin et crack tip opening displacement

plastiquement est plus étendue de façon à respecter l'équilibre des contraintes. Il faut compenser la troncature de la distribution élastique pour $x \leq r_y$. En faisant l'hypothèse simple selon laquelle la distribution élastique de la contrainte σ_{yy} est translatée d'une quantité X l'égalité des aires hachurées conduit à $X = r_y$, soit $R = 2r_y$. La dimension de la zone plastique est donc : $R = \frac{1}{\pi}(\frac{K}{R^P})^2$.

Ce calcul est évidemment approximatif l'équilibre des contraintes n'étant assuré que dans le plan prolongeant la fissure. Il n'est valable que si la dimension de la zone plastique reste assez petite (hypothèse de *zone plastique confinée*). La fissure accompagnée de sa zone plastique se comporte comme une fissure élastique *fictive* de longueur $(c + R)$. R appelée correction de zone plastique d'Irwin est utilisée pour mieux représenter la fissure dans le cas où la plasticité commence à devenir importante. Ce modèle ne peut prétendre représenter correctement la forme de la zone plastique dans tout le plan. Des calculs analytiques et numériques plus évolués montrent que l'estimation fournie conduit, dans tous les cas, à un très bon ordre de grandeur peu affecté par l'écrouissage. Par contre, les formes de la zone plastique sont fortement dépendantes du problème traité.

Le profil de la fissure est *émoussé* par la plasticité. Les lèvres s'écartent à leur extrémité d'une quantité δ appelée écartement de fissure ou *Crack Tip Opening Displacement*, CTOD. $\delta \approx \frac{K^2}{ER^P}$ (E est le module de Young) est un bon ordre de grandeur.

5.4.3 Modèle de Barenblatt

Pour lever la divergence des contraintes et des déformations en pointe de fissure, Barenblatt à émis l'hypothèse des *forces de cohésion* confinées dans le plan de fissure au voisinage de sa pointe. Physiquement, bien que les liaisons soient rompues, les atomes des deux lèvres continuent de s'attirer tant que l'écartement δ des lèvres de la fissure n'est pas trop grand. Aux faibles écartements la réponse est quasi élastique, mais l'attraction s'annule pour les écartements importants dépassant une certaine valeur δ_m correspondant à une longueur de bec R petite devant la taille c de la fissure. La force d'attraction F est une fonction non linéaire de l'écartement δ . Ces forces régularisent le champ de contrainte lorsque le facteur d'intensité de contrainte K' qui leur est associé compense exactement celui K de la théorie linéaire. Dans l'hypothèse d'autonomie de la zone critique la forme du bec de longueur R est indépendante de la géométrie de la structure et du chargement et la force F devient fonction non linéaire de la distance à la tête de fissure. La solution du problème de la fissure chargée par des contraintes de cohésion qui tendent à la fermer conduit aux deux résultats important :

- Le facteur d'intensité de contrainte est lié aux forces de cohésion par $K = \frac{\sqrt{2}}{\pi} \int_0^\pi \frac{\sigma(x)}{\sqrt{x}} dx$
- Le profil d'ouverture du bec $\delta(x)$ varie comme $x^{3/2}$ au lieu de $x^{1/2}$ dans le modèle élastique. Le bec est pointu, ce qui est *physiquement satisfaisant*.

Physiquement, le modèle de Barenblatt est satisfaisant puisque les champs mécaniques sont d'amplitude finie dans tout le solide. Du point de vue pratique, le calcul, qui doit prendre en compte la

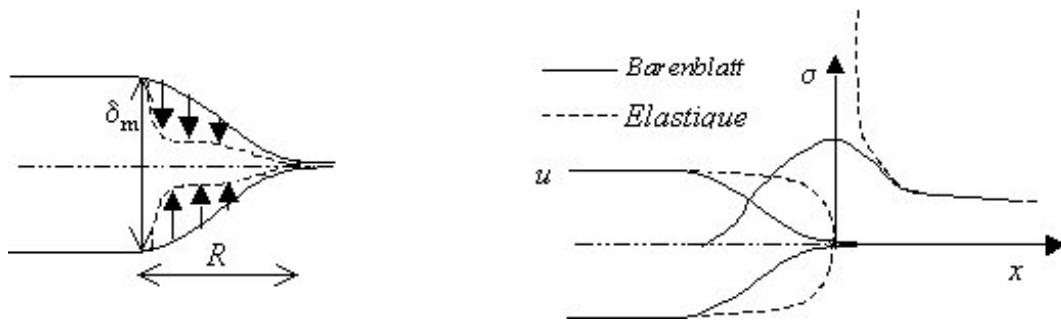
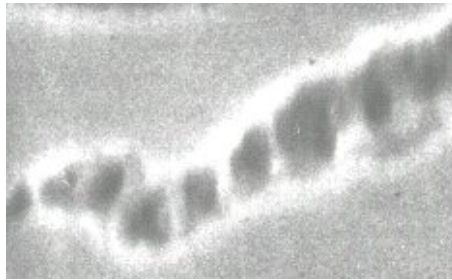


FIG. 5.14 – forces de cohésion modèle de Barenblatt

fonction non linéaire $F(x)$ est moins simple que celui des facteurs d'intensité de contrainte, d'où l'usage répandu du modèle élastique qui se trouve ainsi justifié.

FIG. 5.15 – Craquelure dans un polymère *photo Schirrer*

Les études sur polymère ont montré que cette forme de bec est assez bien vérifiée. Dans de nombreux cas, la rupture des polymères amorphes résulte du développement de craquelures (ou craze) fissures dont les faces sont pontées par des fibrilles. Ce sont des faisceaux de chaînes polymériques extraites de la matrice. Elles sont relativement alignées, comme dans un polymère fortement étiré. Lorsque l'ouverture de la craquelure augmente, la longueur des fibrilles augmente, non par fluage, mais par poursuite de l'extraction des chaînes qui finissent par céder créant une véritable fissure.

5.5 La ténacité des matériaux

La correction d'élasto-plasticité levant la divergence *non physique* des contraintes en tête de fissure, le modèle de fissure en *élasticité linéaire* est à la base de la plupart des théories de la rupture fragile au sens *macroscopique* du terme. En mode d'ouverture symétrique, mode *I* le plus important en pratique, il conduit à la notion de seuil critique, non pas pour la contrainte qui diverge toujours en tête de fissure, mais pour le *facteur d'intensité de contrainte* K .

5.5.1 Condition d'amorçage

Le *critère de rupture*, condition d'amorçage de la propagation de la fissure en mode d'*ouverture* s'écrit alors sous la forme simple :

$$K = K_C \quad (5.5)$$

- Le *facteur d'intensité de contrainte* K uniquement fonction du chargement σ et de la géométrie, en particulier de la taille c de fissure est solution d'un problème d'élasticité linéaire.
- K_C est une *caractéristique physique* du matériau appelée *ténacité*. La ténacité, dont l'unité de mesure est le $\text{MPa}\sqrt{\text{m}}$, s'obtient via la relation $K_C = K(\sigma_R, c) \approx \sigma_R \sqrt{c}$ par la détermination *expérimentale* du chargement critique σ_R provoquant la rupture d'éprouvettes normalisées préentaillées pour dont la forme analytique de la fonction $K(\sigma, c)$ est connue.

5.5.2 La ténacité théorique

La ténacité d'un matériau, caractéristique *intrinsèque* donc indépendante de la taille c de ses défauts, mesure sa résistance au clivage. Elle est donc fonction de l'énergie superficielle γ . La rupture intervenant sous l'action de la concentration de contrainte pour une contrainte *effective* telle $\sigma_R^2 c \approx \gamma E$, la ténacité théorique vaut $K_C \approx \sigma_R \sqrt{c} = \sqrt{\gamma E}$.

Ainsi pour le verre et l'acier doux :

	γ (J.m ⁻²)	E (GPa)	σ_{th} (GPa)	K_{Cth} (MPa.m ^{1/2})	K_C (MPa.m ^{1/2})
Verre	0,54	70	14	0,19	0,7
Acier doux	2	210	46	0,65	140

TAB. 5.2 – Énergie superficielle, Module d'Young et Résistance théorique

Compte tenu du faible intervalle de valeurs de l'énergie superficielle, (γ 0,5-5 J.m⁻²) la ténacité d'un matériau, qui varie comme la racine carrée de sa raideur, reste du même ordre de grandeur (K_C 0,1-1 MPa.m^{1/2}) pour la quasi totalité des céramiques et des métaux.

5.5.3 Le paradoxe de la ténacité

La concentration des contraintes a longtemps été considérée comme expliquant de façon satisfaisante la différence entre les résistances expérimentale et théorique des solides. Cependant, si l'on accepte totalement cette explication, la plupart des matériaux solides devraient être *fragiles* et se rompre à la manière du *verre*. En admettant, avec Griffith, que le diamètre effectif d'extrémité d'une fissure est de l'ordre de grandeur de la distance interatomique, environ 1 Å, une fissure superficielle de taille c *amplifie localement* les contraintes d'un facteur $k \approx 2\sqrt{\frac{c}{\rho}}$

Taille de défaut c	1 μ m	1 cm	1m
Coefficient de concentration de contrainte k	200	20000	200000

Une fissure de 1cm devrait réduire la résistance théorique d'un facteur 20000, auquel cas les vitrages, qui ont souvent des fissures de cette taille, pourraient difficilement survivre. Sur des structures de très grande taille comme des bateaux, on rencontre parfois des fissures de plus d'un mètre de long, qui produiraient une concentration de contraintes d'un facteur 200000, impliquant que la structure en question ne supporterait même pas son propre poids ! De plus, après des années d'usage, il apparaît souvent, dans une grande structure (un navire, un pont ou une automobile), des fissures, des rayures, des points de rouille, ... Le calcul du facteur de concentration des contraintes, à la manière d'Inglis, pour le plus important de ces défauts, conduit à des résultats effarants. Or ces structures continueront à assurer leur fonction avec une fiabilité satisfaisante pendant des dizaines, voire des centaines d'années.

5.5.4 La ténacité effective

La ténacité réelle (déterminée expérimentalement) de la plupart des matériaux est supérieure à la ténacité théorique (voir tableau ci-dessous et Annexe A.8).

Matériau	γ (J.m ⁻²)	W^S (J.m ⁻²)	σ_R (MPa)
Acier doux	2,0	500000	400
Acier haute résistance	2,0	10000	1000
Alliages d'aluminium	0,9	10000	400
Bois	0,1	15000	100
Os	0,2	1700	120
Verre et céramique	0,5	1-10	170

Comme $K_C = \sqrt{\gamma E}$, cela revient à admettre que l'énergie superficielle γ dans cette expression doit être remplacée par une énergie de séparation $G_C > \gamma$. Même dans le cas de matériaux réputés *fragiles*

comme le verre, l'énergie de séparation G_C est supérieure à l'énergie superficielle γ . L'origine physique de cet écart tient au fait que, non seulement il faut séparer les atomes et les molécules au niveau de la fracture (énergie γ), mais de plus toute la structure fine du matériau se trouve désorganisée au voisinage de cette fracture jusqu'à des distances éloignées parfois de plusieurs centimètres. Des liaisons atomiques peuvent être brisées à des distances allant jusqu'à 500000 fois la maille atomique et l'énergie totale nécessaire à la rupture de ces liaisons plus ou moins éloignées est très supérieure à γ dans les matériaux *ductiles*. Même pour des matériaux cassants comme le verre, l'énergie de séparation est environ dix fois plus élevée que la valeur de l'énergie de création des surfaces. Lorsqu'un matériau est caractérisé par une énergie de séparation élevée (i.e. acier ou bois) la valeur de l'énergie W^S nécessaire à la formation d'une fissure est souvent bien supérieure à 100000 fois l'énergie de création γ des surfaces traduisant un mécanisme de fracturation d'une grande efficacité pour absorber des quantités importantes d'énergie dans des régions éloignées de la fracture.

S'il faut bien fournir une énergie $2\gamma dS$ pour accroître de dS la surface de fissure, la création d'une zone à fort endommagement en tête de fissure nécessite une quantité d'énergie supplémentaire justifiant le fait que la ténacité *réelle* soit *supérieure* à la ténacité *théorique*. Le rayon de cette zone étant de l'ordre de $R = \frac{1}{\pi} \left(\frac{K_C}{R^P} \right)^2$ et la contrainte de l'ordre de R^P , pour faire progresser la fissure de dS , il faut aussi fournir de l'énergie pour obtenir cet endommagement. L'énergie supplémentaire à fournir pour créer cet endommagement dans le volume balayé RdS est de l'ordre de $W \frac{(R^P)^2}{E} RdS = \frac{K_C^2}{E} dS = G_C dS$ à comparer à $2\gamma dS$.

- Pour les matériaux *fragiles* comme le verre, $\gamma \sim 0,5 \text{ J.m}^{-2}$, $E \sim 70 \text{ GPa}$, $R^P \sim 170 \text{ MPa}$ et $K_C \sim 0,5 \text{ MPa.m}^{1/2}$ soit $W^S \sim 3 \text{ J.m}^{-2}$ et $R \sim 3 \mu\text{m}$.
- Pour les matériaux *tenaces* comme l'acier doux, $\gamma \sim 2 \text{ J.m}^{-2}$, $E \sim 210 \text{ GPa}$, $R^P \sim 400 \text{ MPa}$ et $K_C \sim 100 \text{ MPa.m}^{1/2}$ soit $W^S \sim 5.10^5 \text{ J.m}^{-2}$ et $R \sim 20 \text{ cm}$.

Les matériaux peu tenaces (fragiles) ont une énergie de séparation G_C qui reste de l'ordre de l'énergie superficielle γ et la théorie du clivage donne bien le bon ordre de grandeur $K_C \simeq K_{Cth}$, la zone d'endommagement en pointe de fissure restant très limitée.

Les matériaux tenaces (ductiles ou rendus tenace par d'autres mécanismes comme les fibrilles des polymères) ont une énergie de séparation G_C très supérieure à l'énergie superficielle γ . $K_C \gg K_{Cth}$ et la théorie du clivage n'est pas adaptée. L'énergie nécessaire à la rupture est quasi entièrement consommée dans la zone d'endommagement de grande taille dont la croissance accompagne celle de la fissure.

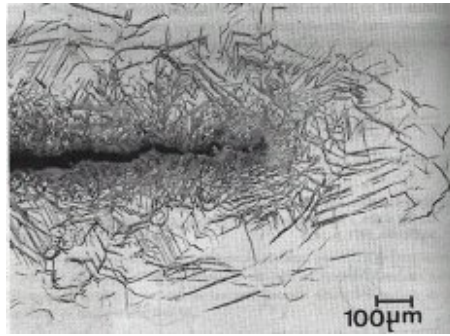


FIG. 5.16 – Sillage plastique bordant une fissure de fatigue dans un acier inoxydable. *Photo ETCA-CREA*

5.6 Approche énergétique

La théorie des concentrations de contrainte suppose implicitement que, si en un point quelconque du solide, la contrainte locale est suffisante pour briser une liaison atomique alors la fissure se propage à travers l'ensemble du solide provoquant la rupture. Or, dans la plupart des matériaux existent des défauts locaux et certains atomes sont trop éloignés de leurs voisins pour assurer une bonne cohésion des liaisons et, malgré cela, ces matériaux ne se brisent pas spontanément, beaucoup sont même très solides. La concentration de contrainte ne suffit pas, à elle seule, à rendre compte du mécanisme

de rupture, c'est une condition nécessaire mais non suffisante pour séparer atomes et molécules et permettre la rupture. Comme tout mécanisme (horloge, moteur...), il a besoin d'être alimenté avec la bonne forme d'énergie. Un matériau ou une structure qui supporte une charge se comporte comme un ressort : il stocke de l'énergie élastique. Cette énergie se répartit dans un volume considérable de la structure. Pour qu'une rupture se produise, une part suffisante de cette énergie doit être transmise à l'endroit de la fissure pour actionner effectivement le mécanisme de rupture.

5.6.1 Critère énergétique pour la rupture brutale

Le point commun à la rupture brutale des structures est la présence de fissures, résultant souvent d'un soudage déficient. La rupture brutale est causée par la croissance, à la vitesse du son dans le matériau, de fissures préexistantes qui soudainement deviennent instables. Illustrons ce comportement à l'aide d'un ballon de baudruche. Un ballon gonflé est un réservoir d'énergie élastique, celle du gaz comprimé et celle de la membrane tendue, l'énergie totale augmentant avec la pression de gonflage. La création d'un défaut par enfoncement d'une aiguille provoque l'explosion du ballon dont la membrane se brise par rupture brutale bien avant d'avoir atteint sa limite élastique. Mais si le ballon n'est que partiellement gonflé, le trou créé par l'aiguille est un défaut stable provoquant simplement une fuite d'air. Enfin si le ballon percé est gonflé rapidement, il finit par atteindre une pression qui le fait brutalement éclater. En d'autres termes le ballon a atteint une pression critique à laquelle le défaut créé par l'épingle devient instable.

5.6.2 Le bilan d'énergie

Pour agrandir la surface d'un défaut il faut déchirer la matière ce qui consomme une énergie de séparation $dU^S = G_C dS$ produit de l'énergie de séparation du matériau par l'aire déchirée.

Tant que l'énergie mécanique dU^{MEC} restituée au cours de cette déchirure est plus faible que l'énergie dU^S nécessaire à la séparation, la déchirure ne se produit pas, sinon elle enfreindrait les lois de la thermodynamique, et le défaut reste stable, autrement dit il s'ouvre sans s'agrandir.

Lorsque l'énergie mécanique emmagasinée U^{MEC} est suffisante pour que la fraction dU^{MEC} restituée au cours de la déchirure dS soit supérieure à l'énergie consommée dU^S , le système libère plus d'énergie qu'il n'en consomme et le défaut, devenu instable, s'agrandit brusquement. A chaque défaut est associé un chargement limite fonction de la taille initiale du défaut et de la géométrie de la pièce qui le qu'elle contient, chargement au-delà duquel l'énergie disponible dans la pièce devient suffisante pour fournir l'énergie nécessaire à la propagation du défaut.

Considérons le système thermodynamiquement isolé constitué d'une plaque contenant une fissure de longueur c dans un matériau d'épaisseur e et du système de mise en charge σ . L'énergie totale U de ce système doit rester constante.

$$U = U^{EXT} + U^{EL} + U^S = U^{MEC} + U^S = Cte$$

Cette énergie se décompose en :

- U^S Énergie de *séparation* utilisée pour créer la fissure de longueur $2c$.
- U^{EL} Énergie *élastique stockée* au sein de la plaque, potentiel des efforts internes.
- U^{EXT} Énergie *potentielle des efforts imposés*.

Avec $U^{MEC} = U^{EXT} + U^{EL}$ énergie *mécanique totale* du système.

Ces différentes énergies dépendent bien évidemment, à épaisseur $e = Cte$, de la longueur de fissure c . La longueur d'équilibre de la fissure est donc fixée par la condition :

$$\frac{dU}{dc} = \frac{dU^{MEC}}{dc} + \frac{dU^S}{dc} = 0$$

Si la fissure s'allonge de $dc > 0$, sa surface croît de $dS = edc \Rightarrow \frac{dU^S}{dc} > 0$ et $\frac{dU^{MEC}}{dc} < 0$. Accroître la longueur de fissure consomme de l'énergie et l'accroissement d'énergie de séparation est prélevé sur l'énergie mécanique disponible U^{MEC} .

Physiquement la fissure ne peut croître que par libération des tensions qui la tiennent fermée. Pour allonger *réellement* la fissure encore faut-il que l'énergie mécanique U^{MEC} du système soit suffisante pour que sa variation $-\frac{dU^{MEC}}{dc}$ puisse compenser l'accroissement $\frac{dU^S}{dc}$ nécessaire à la séparation.

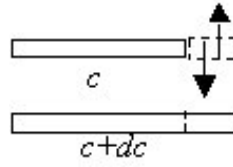


FIG. 5.17 – Allongement d’une fissure par libération des tensions.

5.6.3 Condition d’amorçage et taux de restitution de l’énergie

La quantité $\frac{dU^S}{dS} = \frac{1}{e} \frac{dU^S}{dc}$ n’est autre que l’énergie de séparation G_C caractéristique propre au matériau. La quantité :

$$G = -\frac{dU^{MEC}}{dS} = -\frac{1}{e} \frac{dU^{MEC}}{dc} \quad (5.6)$$

est appelée logiquement *taux de restitution d’énergie*. Le critère de rupture ou condition d’amorçage équivalent au critère $K = K_C$ s’écrit donc :

$$G_C - G = 0 \quad \text{soit} \quad G = G_C \quad (5.7)$$

Comme K , G est une fonction du chargement σ , de la géométrie de la pièce et du défaut, en particulier de sa longueur c , solution d’un problème mécanique élastique en théorie de la rupture fragile.

L’équilibre $G = G_C$ est :

- *instable* si $\frac{d^2U}{dS^2} < 0$, soit $\frac{dG}{dS} > 0$
- *stable* si $\frac{d^2U}{dS^2} > 0$, soit $\frac{dG}{dS} < 0$

5.6.4 Stabilité et propagation

L’apport de l’approche énergétique est la mise en évidence de la stabilité de l’équilibre de la fissure et les conditions de contrôle de sa propagation que l’on peut résumer dans le tableau ci-dessous, v étant la vitesse de propagation de la fissure.

$G < G_C$ <i>Fermeture</i>	$G = G_C$ <i>Équilibre</i> ($v = 0$)	$G > G_C$ <i>Propagation</i> ($v > 0$)
	$\frac{dG}{dS} \leq 0$ Stable	$\frac{dG}{dv} \leq 0$ Contrôlée
	$\frac{dG}{dS} > 0$ Instable	$\frac{dG}{dv} > 0$ Catastrophique

$G < G_C$ Énergie mécanique mobilisable *insuffisante* pour accroître la longueur de fissure, celle-ci se referme (ou se cicatrice dans le cas de certains matériaux comme les adhésifs).

$G = G_C$ La fissure en équilibre ($v=0$ mais fissure ouverte) sous l’action du chargement.

- Si $\frac{dG}{dS} \leq 0$ équilibre *stable* : toute fluctuation entraînant un accroissement de la longueur de fissure provoque une diminution du taux de restitution d’énergie et la fissure tend à reprendre sa longueur d’équilibre en régressant.
- Si $\frac{dG}{dS} > 0$ équilibre *instable* : toute fluctuation entraînant un accroissement de la longueur de fissure provoque une augmentation du taux de restitution d’énergie et la fissure se met à croître ($v \neq 0$ fissure se propageant plus ou moins rapidement).

$G > G_C$ Énergie mobilisable excédentaire pour accroître la longueur de la fissure, celle ci est donc en régime de propagation. Il faut alors s’intéresser à la cinétique de propagation qui sera contrôlée par l’évolution du taux de restitution d’énergie en fonction de la vitesse de fissure.

- Si $\frac{dG}{dv} < 0$ la propagation est dite contrôlée, la fissure progresse à vitesse décroissante vers un nouvel état d’équilibre (fissure plus grande)
- Si $\frac{dG}{dv} = 0$ la fissure progresse à vitesse constante.
- Si $\frac{dG}{dv} > 0$ la propagation est dite catastrophique, la fissure progresse à vitesse croissante et provoque la rupture de la pièce.

Si l’énergie en excès n’est pas dissipée par d’autres mécanismes, cas des matériaux fragiles,

la vitesse de clivage augmente rapidement jusqu'à atteindre une vitesse proche de la vitesse des ondes de surface de Rayleigh. L'énergie excédentaire est dissipée dans la propagation des ondes associées, d'où le bruit caractéristique accompagnant ce type de rupture.

5.6.5 Courbe d'équilibre d'une fissure

Le taux de restitution d'énergie $G(\sigma, c)$ étant fonction du chargement σ et de la longueur c de la fissure, la longueur d'équilibre c_{eq} donnée par $G(\sigma, c_{eq}) = G_C$ est fonction du chargement imposé σ .

A l'échelle de la structure au chargement Q correspond un allongement q dont le taux de croissance $\frac{dq}{dQ}$ est d'autant plus grand que la fissure préexistante est longue. Autrement dit la fissure s'ouvrant sans progresser sous l'action du chargement Q la souplesse (inverse de la raideur) *apparente* $\lambda = \frac{dq}{dQ}$ de la structure est une fonction *croissante* de la longueur de fissure c . Ce régime d'ouverture perdure jusqu'au chargement vérifiant la condition d'amorçage $G(Q, c) = G_C$ pour la fissure de longueur c .

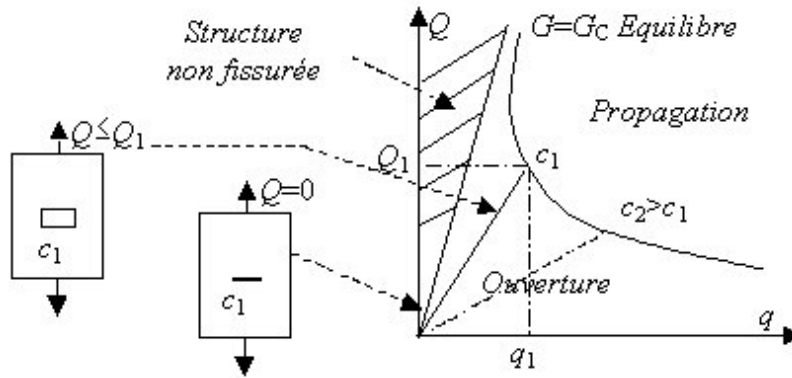


FIG. 5.18 – Courbe d'équilibre ou d'amorçage de propagation

Dans le plan de chargement Q, q la condition d'amorçage devient la courbe d'amorçage $Q = f(q)$ paramétrée en longueur de fissure. Elle sépare le plan de chargement en deux régions :

- La région inférieure correspond au domaine d'ouverture (la fissure s'ouvre sous l'action du chargement sans variation de sa longueur)
- La région supérieure correspond au domaine de propagation (la fissure s'agrandit sous l'action du chargement).

5.6.6 Influence du type de chargement

La théorie de la rupture fragile suppose un comportement linéaire $q = \lambda(c)Q$ jusqu'au point d'amorçage. A longueur de fissure c donnée :

- Les efforts imposés dérivent d'un potentiel U^{EXT} dont la variation $dU^{EXT} = -Qdq$ est l'opposée du travail $dW = Qdq$ des efforts imposés considérés comme externes au système.
- Les efforts internes dérivent d'un potentiel U^{EL} énergie élastique stockée dans le matériau dont la variation $dU^{EL} = \frac{1}{2}Qdq = \frac{1}{2}qdQ$ (élasticité linéaire).

L'énergie mécanique $U^{MEC} = U^{EXT} + U^{EL}$ est également un potentiel indépendant du trajet de chargement suivi que celui-ci s'effectue à *déplacement* imposé, à *charge* imposé ou comme combinaison des deux. Sous chargement croissant un défaut nucléant de petite taille va croître jusqu'à atteindre la dimension d'équilibre $2c_{eq}$ appelée *longueur de Griffith* indépendante elle aussi du type de chargement utilisé pour atteindre l'équilibre.

Par contre, au delà de l'amorçage, le type de chargement *influe* sur le comportement en *propagation*. Il est donc intéressant de définir l'origine de l'énergie mécanique motrice de la fissuration pour les deux types de chargement extrêmes : chargement à force ou à déplacement imposé.

Équilibre à déplacement imposé Le déplacement q_0 étant imposé brutalement à l'instant initial, le défaut va croître jusqu'à la longueur d'équilibre c . La force résultante Q est déterminée à tout instant par la réponse du matériau $q = \lambda(c)Q$, la souplesse λ étant fonction croissante de la taille

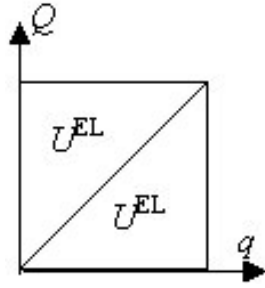


FIG. 5.19 – Energie mécanique en élasticité linéaire

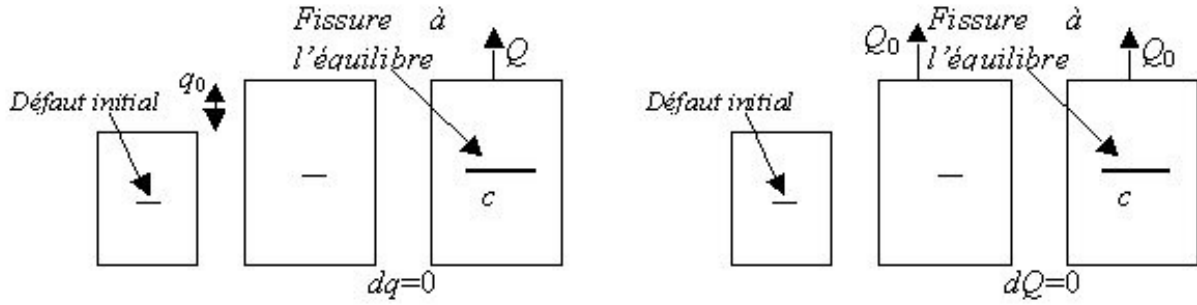


FIG. 5.20 – Fissure à déplacement imposé et à charge imposée

c du défaut.

A $dq = 0$ entraînant $dQ = -\frac{d\lambda}{\lambda}Q < 0$ la force Q ne travaille pas et la variation du potentiel des efforts externes $dU^{EXT} = Qdq = 0$. La variation d'énergie élastique $dU^{EL} = \frac{1}{2}qdq$ en élasticité linéaire vaut alors $dU^{EL} = \frac{1}{2}q_0dQ = -\frac{1}{2}Q^2d\lambda < 0$. Il en va de même de la variation d'énergie mécanique $dU^{MEC} = dU^{EXT} + dU^{EL} = -\frac{1}{2}Q^2d\lambda < 0$.

Finalemt : $dU^{MEC} < 0$ avec $dU^{EXT} = 0$ et $dU^{EL} < 0$. L'énergie motrice de fissuration est *prélevée* sur la réserve d'énergie élastique stockée. La propagation ultérieure sera *contrôlable*.

Équilibre à force imposée La charge Q_0 étant imposée brutalement à l'instant initial, le défaut va croître jusqu'à la longueur d'équilibre c .

A $dQ = 0$, entraînant $dq = Q_0d\lambda$, le déplacement résultant q étant déterminé à tout instant par la réponse du matériau $q = \lambda(c)Q$. La force Q_0 travaille dans le déplacement q et la variation du potentiel des efforts externes vaut cette fois $dU^{EXT} = -dW^{EXT} = -Q_0dq < 0$, celle de l'énergie élastique stockée $dU^{EL} = \frac{1}{2}Qdq$ vaut $\frac{1}{2}Q_0^2d\lambda > 0$ et la variation d'énergie mécanique $dU^{MEC} = dU^{EXT} + dU^{EL} = -dU^{EL} = -\frac{1}{2}Q_0^2d\lambda < 0$.

Finalemt : $dU^{MEC} < 0$ avec $dW^{EXT} = -dU^{EXT} > 0$ et $dU^{EL} > 0$. L'énergie motrice de fissuration est *prélevée* sur le *travail des forces externes* dont une moitié sert à augmenter l'énergie élastique stockée. La propagation ultérieure sera *catastrophique*.

5.7 La longueur de Griffith

La longueur de Griffith d'équilibre d'une fissure étant indépendante du trajet de chargement, imposons à une plaque fissurée de grande dimension devant la longueur de fissure $2c$ et d'épaisseur e un chargement uniforme σ normal à la fissure. L'énergie qu'il a fallu fournir pour créer cette fissure est $U^S = G_C S = 2G_C e c$. Le calcul exact en coordonnées elliptiques (Inglis) de l'énergie élastique stockée dans la plaque est fastidieux, mais son estimation est aisée. A la contrainte appliquée σ correspond une déformation de l'ordre de $\frac{\sigma}{E}$, E étant le module d'Young du matériau, et la densité volumique d'énergie élastique est de l'ordre de $\frac{1}{2} \frac{\sigma^2}{E}$. L'énergie élastique est de l'ordre de $\frac{1}{2} \frac{\sigma^2}{E} V$, V volume caractéristique associé à la taille de la fissure, seule dimension associée à ce problème plan, et non pas le volume total de la plaque de taille infinie car, *physiquement*, une fissure ne perturbe le champ de contrainte de

façon significative que dans une petite zone en son voisinage et seule l'énergie mécanique disponible dans cette zone sera mobilisable pour la faire progresser.

$V = 4\pi c^2 e$ étant le volume du cylindre, rayon $2c$ épaisseur e , entourant la fissure, l'énergie élastique stockée vaut $U^{EL} = \frac{2\pi c^2 e \sigma^2}{E}$, la variation d'énergie mécanique, moteur de la fissuration, vaut, à force imposée, $dU^{MEC} = -dU^{EL}$ et le taux de restitution d'énergie $G = -\frac{dU^{MEC}}{dS} = \frac{4\pi c \sigma^2}{E} \cdot \frac{dG}{dS} > 0$, l'équilibre $G = G_C$ est *instable* (équilibre à chargement imposé) et la longueur d'équilibre de *Griffith* : $L_C = \frac{1}{\pi} G_C \frac{E}{\sigma^2}$ telle que $\pi \sigma^2 L_C = G_C E$.

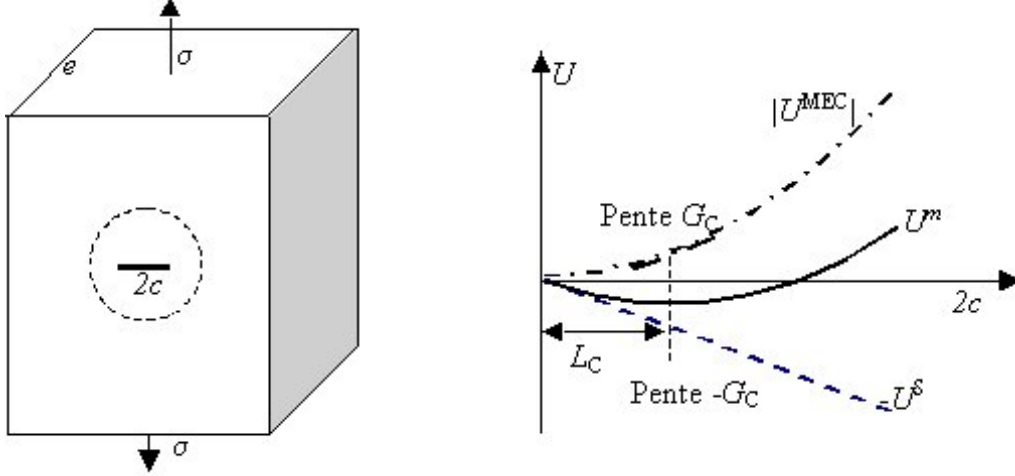


FIG. 5.21 – Longueur d'équilibre de Griffith et énergie motrice

L'énergie U^S absorbée par le système pour créer une fissure varie comme c . A chargement imposé σ , l'énergie *mécanique* $|U^{MEC}|$ *libérée* par le système pendant la création de la fissure varie elle comme c^2 . Il dispose donc de l'énergie motrice $U^m = |U^{MEC}| - U^S = \frac{\pi c^2 e \sigma^2}{E} - 2G_C e c$ pour faire progresser la fissure. La variation d'énergie $\frac{dU^m}{dc}$ fournie par le système pour agrandir ($dc > 0$) les fissures de taille c :

- est négative si $2c < L_C$ inférieure à la longueur de Griffith, le système *consomme* de l'énergie. Il n'y a donc aucune raison énergétique pour que ces fissures se propagent. Si de telles fissures préexistent, elles sont *stables* et généralement sans danger.
- est positive si $2c > L_C$ supérieure à la longueur de Griffith ces fissures, le système *fournit* de l'énergie pour agrandir ces fissures. Elles sont donc *instables* et se propagent rapidement conduisant à la rupture.

5.7.1 Taux de restitution d'énergie

G , solution du problème élastique linéaire, se détermine à partir de la géométrie et du chargement de la pièce et son expression analytique se calcule aisément pour fissure bidimensionnelle, le raisonnement portant sur une épaisseur e unité.

La structure bidimensionnelle d'aire S et d'épaisseur e unité contenant la fissure de longueur c est limitée par le contour C . Lors de l'accroissement dc de la longueur de fissure le contour C se déforme dans le champ de déplacement \vec{u} qu'il induit et :

- La variation de l'énergie élastique $U^{EL} = \frac{1}{2} \int_S \vec{\sigma} \vec{\varepsilon} dS$ s'écrit par application du principe des travaux virtuels $\delta U^{EL} = \frac{1}{2} \int_{C+F} \delta \vec{T} \cdot \vec{u} dl$, l'intégration portant sur le *contour total* : contour *extérieur* C et contour de *fissure* F . Soit $\frac{\partial}{\partial c} U^{EL} = \frac{1}{2} \int_{C+F} \{ \vec{T} \frac{\partial \vec{u}}{\partial c} + \vec{u} \frac{\partial \vec{T}}{\partial c} \} dl$. La fissure étant libre de charge $\vec{T} = 0$ et $\frac{\partial \vec{T}}{\partial c} = 0$ sur F , le contour d'intégration se réduit au contour extérieur C et $\frac{\partial}{\partial c} U^{EL} = \frac{1}{2} \int_C \{ \vec{T} \frac{\partial \vec{u}}{\partial c} + \vec{u} \frac{\partial \vec{T}}{\partial c} \} dl$.
- La variation du travail des forces extérieures $\frac{\partial}{\partial c} W^{EXT} = \int_{C^T} \vec{T} \frac{\partial \vec{u}}{\partial c} = \int_C \vec{T} \frac{\partial \vec{u}}{\partial c}$ car l'effort externe ne travaille pas sur la partie de C où les déplacements sont imposés.

Finalement, le *taux de restitution d'énergie* :

$$G = -\frac{\partial}{\partial c}(U^{EXT} + U^{EL}) = \frac{\partial}{\partial c}(W^{EXT} - U^{EL}) = \frac{1}{2} \int_C \left\{ \vec{T} \frac{\partial \vec{u}}{\partial c} - \vec{u} \frac{\partial \vec{T}}{\partial c} \right\} dl \quad (5.8)$$

Cette expression permet de calculer G connaissant les valeurs des champs sur le contour extérieur C de la structure ou de le mesurer. Elles permettent également de déterminer G expérimentalement les champs mécaniques considérés forces imposées et déplacements résultants étant expérimentalement accessibles.

5.7.2 Énergie de fissuration et longueur absolue

La longueur de Griffith est une longueur *absolue*, rapport de la *densité surfacique d'énergie de fissuration* G_C du matériau à la *densité volumique d'énergie élastique* $\frac{\sigma^2}{E}$ dans la structure. La longueur critique de stabilité L_C d'une fissure est, à niveau donné de contrainte de traction σ , proportionnelle à l'énergie de séparation G_C . Cette grandeur et la nature des mécanismes dont elle dépend sont des caractéristiques très importantes, tant en biologie que dans les divers domaines techniques.

On constate que la valeur habituellement admise pour la résistance à la traction - celle que l'on mesure en tirant sur une éprouvette de forme régulière - n'est que médiocrement corrélée avec l'énergie de séparation. Pour les métaux, la corrélation est même inversée : les aciers mous de faible résistance à la traction sont peu fragiles, tandis que les durs qui ont une grande résistance à la traction sont cassants.

L'échelle des dimensions de la structure joue un rôle important. En effet, la longueur de Griffith étant une grandeur absolue pour un matériau et un niveau de contrainte donnés, cette longueur est la même qu'il s'agisse d'une mouche ou d'un pétrolier. C'est là que la théorie de Griffith prend toute son importance :

Dans les petits objets Une fissure risque d'être critique dès lors qu'elle fait plus de quelques millimètres, il est alors plus sûr d'utiliser un matériau dur à haute résistance dont le travail de fracture est assez faible.

Dans les grandes structures Les dimensions des ouvertures intentionnelles (*i.e.* portes ou hublots) ou accidentelles (*i.e.* fissures) doivent être proportionnées à la longueur critique. Un alliage très ductile de travail de fracture élevé est alors préférable. Ces matériaux solides, mais ne résistant pas aux fortes contraintes de traction, devront être utilisés avec des contraintes faibles, afin que la taille des fissures critiques reste acceptable. Pour l'acier doux ordinaire utilisé en construction métallique la longueur critique est de l'ordre de 2m pour une contrainte de 80 MPa.

Une structure chargée doit être vue comme un système énergétique potentiellement instable, un réservoir accumulant de l'énergie qui cherche à s'échapper à l'instar d'un explosif chimique. Celui-ci ne doit pas exploser sous l'effet d'un échauffement localisé, provoqué par exemple par un petit impact. Si l'échauffement ne concerne qu'un très petit volume, la perte de chaleur dans l'environnement sera supérieure à la production de chaleur issue de la dégradation chimique et la réaction explosive ne divergera pas. Pour libérer la totalité de l'énergie explosive, il faut activer un certain volume critique. Le travail des spécialistes est de faire en sorte que l'explosif stocke une énergie chimique suffisante, mais que cette énergie ne se libère que dans des conditions parfaitement déterminées. La libération d'une grande quantité d'énergie stockée se trouve bloquée par une barrière énergétique couplée avec un effet dimensionnel (ou effet d'échelle).

Dans le cas d'un matériau sous contrainte, cette dimension critique est la longueur de Griffith. Pour les niveaux de contrainte que l'on rencontre dans les structures ordinaires, la quantité d'énergie stockée par unité de masse est très inférieure à l'énergie chimique des explosifs. C'est pourquoi, lors des essais de traction, la rupture d'une éprouvette ne s'accompagne que d'un bruit modéré. Maintenant que l'on parvient, en laboratoire, à approcher la résistance théorique de nombreux solides, on constate qu'au voisinage de la limite de rupture la quantité d'énergie de déformation stockée par le matériau s'approche de l'énergie totale des liaisons chimiques. La rupture de ces échantillons hyperrésistants libère une énergie par unité de masse de matière peu différente de celle d'un explosif comme la dynamite. Lors de la rupture des trichites on observe une véritable explosion et l'émission d'un petit nuage de

poussière ou de fumée. En outre, il ne reste pratiquement rien de l'échantillon qui est totalement désintégré.

5.7.3 Énergie de fissuration et ténacité : La relation entre G_C et K_C

Pour un niveau de contrainte σ donné on trouve une longueur critique de défaut L_C telle que $\sigma^2 L_C \approx K_C^2$ dans l'approche en terme de force $K = K_C$ et $\sigma^2 L_C \approx G_C E$ dans l'approche en terme d'énergie $G = G_C$ conduisant à la relation : $K_C^2 \approx G_C E$.

G_C est une caractéristique du matériau qu'il faut déterminer expérimentalement.

Mouton pendule de Charpy. La différence d'énergie potentielle du pendule, caractérisée par la différence des angles de lâcher et de remontée, est égale à l'énergie consommée pour provoquer la *rupture au choc* de l'éprouvette préentaillée. Cette énergie, appelée *résilience*, comprend trois termes : l'énergie de séparation proprement dite $2\gamma S$, l'énergie élastique U^{EL} proportionnelle au carré de la limite élastique σ_e et l'énergie plastique $(G_C - 2\gamma)S$. L'énergie élastique étant calculée à partir de la connaissance de σ_e et de la géométrie de l'éprouvette la *résilience* est une mesure de G_C .

Transition fragile ductile. Pour les matériaux *fragiles* la résilience se réduit pratiquement à $U^{EL} + 2\gamma S$ autorisant la détermination de l'énergie superficielle γ du matériau.

Les matériaux *ductiles*, comme les métaux, présentent une variation brutale de résilience autour d'une température caractéristique appelée *température de transition fragile-ductile*. En dessous de cette température, l'énergie de rupture se réduit à l'énergie de séparation γ , le matériau se comporte comme un matériau *fragile*. L'activation thermique est trop faible pour mobiliser les dislocations et la rupture de clivage ne s'accompagne pas de dissipation plastique. Au delà de cette température, l'endommagement et la dissipation plastique thermiquement activée augmentent fortement l'énergie dissipée, donc la résilience. La fragilisation peut être obtenue par *vieillessement*, *corrosion chimique* (le Ga abaisse très fortement l'énergie de rupture de l'aluminium, l'eau celle du verre d'où la découpe sous arrosage), *traitement thermique* et *irradiation aux neutrons*.

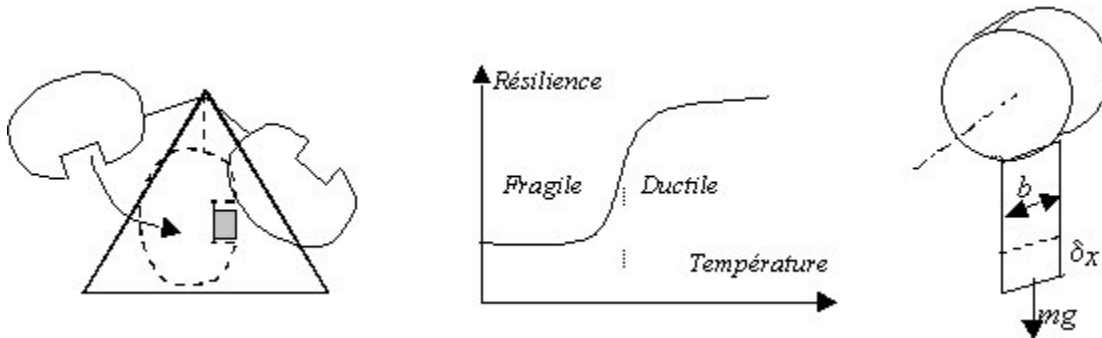


FIG. 5.22 – Mouton de Charpy, Transition fragile ductile, Pelage des adhésifs

Pelage des adhésifs. La même grandeur G_C mesure la force des adhésifs. En suspendant un poids mg à un petit morceau déroulé de ruban adhésif d'épaisseur e et de largeur b , le ruban ne se déroule pas sur le bord du rouleau, comme dans le cas d'une pelote de ficelle, mais le long du plan de symétrie vertical. Le pelage du ruban à $\frac{\pi}{2}$ est assimilable à la propagation d'une fissure entre la partie déroulante et la partie collée sur le rouleau. La charge critique produisant le déroulement rapide du ruban (*rupture brutale*) est liée à l'énergie de rupture G_C de l'adhésif de manière particulièrement simple. Lors du décollement d'une longueur dx de ruban qui consomme l'énergie de séparation $dW^S = G_C b dx$ la charge externe mg effectue un travail $dW = mg dx$. L'énergie élastique associée à l'allongement de la partie décollée dx étant négligeable du fait de la raideur élevée du ruban, l'égalité $dW = dW^S$ conduit à la relation $G_C = \frac{mg}{b}$. Typiquement, $b=2$ cm, $m=1$ kg, et $g=10$ m.s⁻², ce qui donne $G_C=500$ J.m⁻² valeur raisonnable pour les adhésifs.

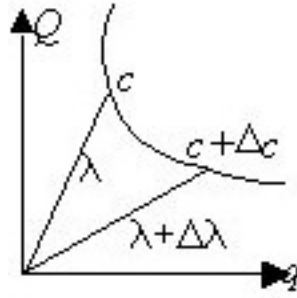


FIG. 5.23 – Méthode de la souplesse

Méthode de la souplesse. Elle découle directement des relations $G = \frac{1}{2}q^2 \frac{\partial \lambda}{\partial c}$ à charge Q imposé et $G = -\frac{1}{2}Q^2 \frac{\partial \lambda}{\partial c}$ à déplacement q imposé. On réalise deux mesures de pente des courbes force déplacement correspondants à deux longueurs de fissure légèrement différentes. Il s'agit donc d'une méthode différentielle qui porte sur la variation de pente élastique $\frac{\Delta \lambda}{\Delta c}$ due à la variation de géométrie de la fissure. La difficulté expérimentale réside dans la réalisation de deux modèles identiques sauf en ce qui concerne la fissure. Il ne faut pas que la différence de longueur de fissure soit importante, mais il faut qu'elle soit suffisante pour entraîner une variation de pente décelable expérimentalement.

5.8 La propagation des fissures

L'ouverture d'une fissure jusqu'au point d'amorçage est un phénomène *quasi statique* mais au delà, dans la phase de *propagation*, la fissuration devient un phénomène *dynamique* et il faut ajouter au bilan d'énergie l'*énergie cinétique* correspondant à la mise en mouvement de la matière libérée par l'agrandissement de la fissure. Dans le changement de géométrie correspondant à un processus réel de fissuration (augmentation dS d'aire de fissure) la conservation de l'énergie totale du système s'écrit maintenant :

$$dW^{EXT} = dU^{EL} + dU^S + dU^{CIN} \quad (5.9)$$

dU^{CIN} étant la variation d'énergie cinétique lors de l'accroissement de surface de la fissure. La condition d'*amorçage* $G = G_C$ s'écrit aussi $dU^{CIN} = 0$ et la condition de *propagation* $G > G_C$ est équivalente à $dU^{CIN} > 0$. L'initiation de la propagation à partir de la configuration d'équilibre d'ouverture d'une fissure est possible dès que $G = G_C$. Plusieurs cas sont à distinguer :

1. Si, à tout instant, les sollicitations externes évoluent de manière à maintenir l'égalité $G = G_C$ donc sans accroissement d'énergie cinétique, la rupture est *contrôlée* et la croissance de la fissure *stable*.
2. Mais si, à tout instant, les sollicitations externes provoquent un accroissement d'énergie cinétique, $G > G_C$, seule la fraction dU^S de l'énergie motrice $dU^{MEC} = dW^{EXT} - dU^{EL}$ est utilisée à la rupture des liaisons donc à l'accroissement de la surface de fissure, la partie complémentaire $dU^{CIN} = dU^{MEC} - dU^S$ étant transformée en énergie cinétique. La manière dont le matériau utilisera cette énergie cinétique va conditionner le caractère *contrôlable* (stable) ou *catastrophique* (instable) de la propagation.
 - Si le matériau ne présente pas de frottement interne, matériau *élastique fragile parfait*, l'accroissement d'énergie cinétique est dissipé dans la création de nouvelle surface et la vitesse de propagation de la fissure va croître très rapidement pour atteindre une vitesse proche de la vitesse du son dans le matériau (quelques milliers de $m.s^{-1}$) conduisant à la rupture *catastrophique*.
 - Si celui-ci est doué de frottement interne, comme c'est le cas des polymères et des élastomères, le surplus d'énergie sera dissipée sous forme de chaleur limitant d'autant plus la vitesse de propagation que le frottement interne sera élevé.

- Enfin, si l'évolution du chargement extérieur est telle que dans une première phase il y a surplus d'énergie motrice ($G > G_C$) donc accroissement d'énergie cinétique puis dans une seconde phase déficit d'énergie motrice ($G < G_C$), le surplus d'énergie cinétique accumulé dans la première phase pourra être partiellement utilisé pour compenser le déficit d'énergie motrice pendant une partie de la seconde phase et conduire à un *éventuel équilibre* (arrêt de la propagation) de la fissure.

5.8.1 La courbe d'équilibre et la propagation contrôlée

Ces mécanismes s'illustrent graphiquement dans le plan de chargement Q, q dont les régions stable (régime d'ouverture) et instable (régime de propagation) sont séparées par la courbe d'amorçage. Le matériau sera considéré, pour des raisons de simplicité, fragile à faible frottement interne.

La courbe d'équilibre correspondant à la condition d'amorçage $G = G_C$ admet deux asymptotes, l'une correspondant à la raideur du matériau en l'absence de fissure et l'autre l'axe des q correspondant au cas où le solide est traversé complètement par une fissure coupant la ligne des forces. Elle représente la limite du domaine de sécurité de la pièce, domaine à l'intérieur duquel, quelque soit le trajet de charge, donc quelle que soit la longueur de fissure, on a l'assurance qu'elle ne se propage pas.

Considérons le trajet de charge OAD (abscisse curviligne s) au cours duquel la rupture contrôlée produit un accroissement de la fissure de la longueur initiale $c(A)$ à la longueur finale $c(D) > c(A)$. Sur le trajet OA les lèvres de la fissure de longueur $c(A)$ s'ouvrent progressivement sans variation de sa longueur. Au delà du point A l'évolution du chargement extérieur est contrôlé de sorte qu'il décrive la portion AD de la courbe d'équilibre. La longueur de la fissure croît progressivement de $c(A)$ à $c(D)$, la condition $G = G_C$ étant vérifiée en tout point du trajet AD .

Le *taux de restitution d'énergie* G vérifie la relation $dU^{MEC} = -Gdc$, soit d'après (5.8), $\Delta U^{MEC} = -\frac{1}{2} \int_A^D (Qdq - qdQ)ds$, Q les efforts externes appliqués et q les déplacements correspondants, relation qui n'est autre (au signe près) que la *surface sous la courbe de charge*, dans ce cas particulier $OADO$. La rupture étant *parfaitement contrôlée*, $G = G_C$ ou $\frac{\partial U^{MEC}}{\partial c} + \frac{\partial U^S}{\partial c} = 0$ en tout point de A à D , cette surface représente également l'énergie ΔU^S qu'il a fallu pour agrandir la fissure. L'aire du triangle curviligne $OADO$ représente donc l'énergie de fissuration à fournir pour faire progresser la fissure de sa longueur initiale $c(A)$ à sa longueur finale $c(D)$.

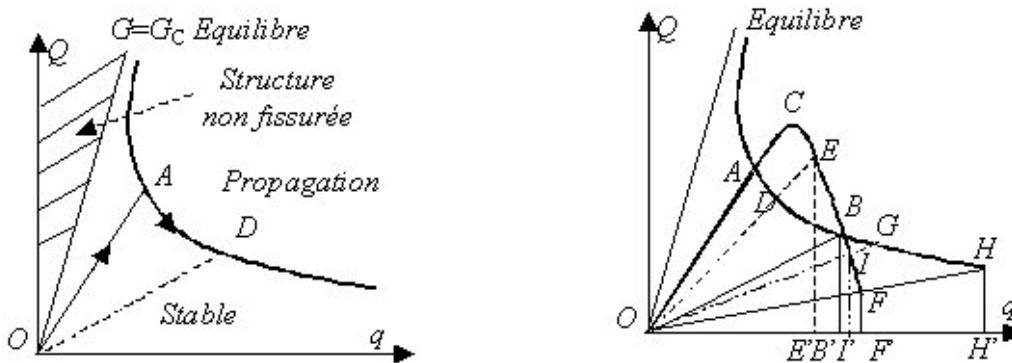


FIG. 5.24 – Courbe d'équilibre et stabilité de propagation

5.8.2 La stabilité de la propagation

Considérons maintenant le problème de la stabilité de la *propagation* de la fissure lorsque le trajet de charge traverse la courbe d'équilibre : courbe $PACBEF$ qui se termine en F au moment précis où la fissure s'arrête.

- Au point A de la courbe d'équilibre la fissure commence à se propager.
- Au point E une décharge virtuelle élastique s'effectuant suivant le trajet rectiligne EDO dont la pente, raideur de la pièce fissurée, est une fonction univoque de la longueur de fissure, la

Aire	Énergie associée
Aire $OACEEO'$	ΔW^{EXT} travail des <i>efforts externe</i>
Aire $OEE'O$	ΔU^{EL} énergie <i>élastique</i> stockée
Aire $OADO$	ΔU^S énergie de <i>rupture</i> dissipée
Aire $ACED$	ΔU^{CIN} énergie <i>cinétique</i> disponible > 0
Aire $OACEDO$	$\Delta U^{MEC} = \Delta U^S + \Delta U^{CIN} = \Delta W^{EXT} - \Delta U^{EL}$ énergie <i>motrice disponible</i> > 0

fissure en propagation à la même longueur que la fissure en état d'équilibre au point D . Ces aires vérifient bien le bilan énergétique $\Delta W^{EXT} = \Delta U^{EL} + \Delta U^S + \Delta U^{CIN}$

3. Au point B l'énergie cinétique ΔU^{CIN} représentée par l'aire $ACEBDA$ est maximale. Si cette énergie n'était pas transformée en énergie de rupture, la fissure arrêterait de se propager et sa nouvelle longueur d'équilibre serait $c(B)$.

Aire	Énergie associée
Aire $OOBII'O$	ΔW^{EXT} travail des <i>efforts externe</i>
Aire $OII'O$	ΔU^{EL} énergie <i>élastique</i> stockée
Aire $OBGO$	ΔU^S énergie de <i>rupture</i> dissipée
Aire $OBIO$	$\Delta U^{MEC} = \Delta W^{EXT} - \Delta U^{EL}$ énergie <i>motrice disponible</i> > 0

4. Lorsque la fissure croît de B en G , la décharge élastique virtuelle GO définit le point I sur le trajet de charge qui rentre dans le domaine de stabilité. Il n'y a donc plus d'énergie cinétique créée. La différence $\Delta U^{MEC} - \Delta U^S$ aire $BGIB$ est *négative* conformément au fait que le trajet de charge est rentré dans le domaine de stabilité $G < G_C$. La fissure ne peut croître au delà de B que si une partie au moins de l'énergie cinétique accumulée entre A et B , aire $ACEBDA$ vient compenser le déficit d'énergie motrice entre B et G .
5. Si la quasi totalité de cette énergie cinétique est utilisée pour faire progresser la fissure, celle-ci se stabilisera au point H correspondant au point F du trajet de charge sur la décharge élastique HFO tel que les aires $ACEBDA$ et BHF soient égales. Toute l'énergie cinétique en excès a été utilisée pour compenser le déficit d'énergie motrice aire BHF .
6. De B à H Le *déficit* de force motrice $\Delta U^S - \Delta U^{MEC}$ est bien égal à l'aire BFH . Le point H

Aire	Énergie associée
Aire $OOBFF'O$	ΔW^{EXT} travail des <i>efforts externe</i>
Aire $OFF'O$	ΔU^{EL} énergie <i>élastique</i> stockée
Aire $OBHO$	ΔU^S énergie de <i>rupture</i> dissipée
Aire $OBFO$	$\Delta U^{MEC} = \Delta W^{EXT} - \Delta U^{EL}$ énergie <i>motrice disponible</i> > 0

est bien le point d'équilibre ultime de la fissure. La rupture interviendra si la dimension de la pièce est inférieure à la longueur $c(H)$. La rupture ne sera *contrôlable* que si le trajet de charge revient assez tôt dans la zone de stabilité.

L'interprétation géométrique de Berry permet cependant de comprendre au moins qualitativement le comportement de propagation car elle suppose un calcul de l'énergie de rupture en quasi statique. Or pour de nombreux matériaux, l'énergie de rupture est une fonction de la cinétique de rupture au travers de la dépendance de G_C avec la vitesse de propagation.

5.8.3 Influence du type de chargement

En rupture à force imposée. Lorsque le point d'amorçage A est atteint la force $Q = Q_A$ est maintenue constante. Une fois dans le domaine instable, U^{CIN} augmente rapidement et toujours plus

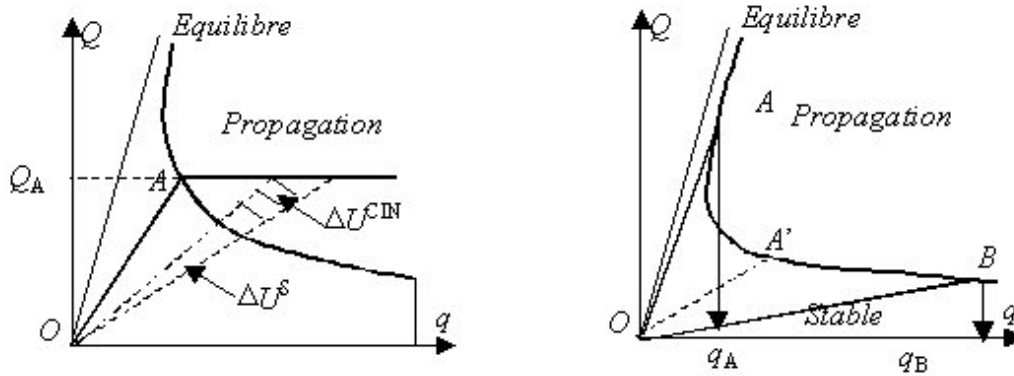


FIG. 5.25 – Stabilité de propagation et type de chargement à force et déplacement imposé

vite que U^S . Les courbes de chargement et d'équilibre ne peuvent se recouper conduisant à la *rupture brutale catastrophique*.

En rupture à déplacement imposé. Lorsque le point d'amorçage A ou B est atteint le déplacement constant $q = q_A$ ou $q = q_B$ est maintenu constant.

- Si la taille initiale de la fissure est petite, amorçage sur la partie supérieure de la courbe d'équilibre au point A , il y aura début de propagation instable, l'arrêt de la fissure dépendra de l'importance de l'énergie cinétique acquise au moment où la courbe de charge recoupe à déplacement fixé la courbe d'équilibre. Le dessin correspond à un arrêt de fissure au point A' lorsque tout l'énergie cinétique en excès a été consommée pour agrandir la fissure. Plus la fissure initiale est petite (plus haut sur la courbe se trouve le point d'amorçage) et plus le risque de rupture catastrophique est important.
- Si la taille initiale de la fissure est grande, amorçage sur la partie inférieure de la courbe d'équilibre au point B , il n'y aura pas de propagation, la fissure va s'ouvrir diminuant la partie élastique du déplacement de la structure donc la force appliquée et l'on rentre immédiatement dans le domaine de stabilité.

A déplacement imposé, une grande fissure est moins dangereuse qu'une petite. La stabilité de la propagation dépend essentiellement du mode de chargement. Le mode à *force imposée* est *toujours instable*, le mode à *déplacement imposé* est *habituellement stable* (en pratique on se trouve presque toujours sur la partie inférieure de la courbe d'amorçage) mais il peut devenir instable dans certains cas particuliers.

5.9 Les mécanismes de la rupture brutale

Les deux mécanismes principaux de propagation d'une fissure sont le *déchirement ductile* et le *clivage fragile*.

5.9.1 Le déchirement ductile des métaux

Lorsqu'une charge suffisante est appliquée à un matériau *ductile* pouvant soutenir une déformation plastique importante, la rupture se développe à partir d'une fissure, souvent une fissure de fatigue, et la surface de rupture est extrêmement *rugueuse*, constituée de cupules traduisant l'arrachement de matière et la forte dissipation d'énergie de déformation plastique en tête de fissure dans la zone de rayon $R = \frac{1}{\pi} \left(\frac{K_C}{R^P} \right)^2$. Ce rayon augmentant rapidement quand R^P diminue. Les fissures dans les *matériaux mous* sont associées à des *zones plastifiées importantes*. La rupture par déchirement ductile *consomme beaucoup d'énergie par déformation plastique* et plus la zone plastique est étendue, plus l'énergie absorbée est importante, donc plus G_C et K_C sont élevés. C'est pourquoi les métaux *ductiles* ont une telle *ténacité*. D'autres matériaux doivent aussi leur ténacité à ce comportement, par exemple la pâte à modeler, et certains polymères la doivent à un mode de rupture similaire au déchirement ductile (formation des *crazes* avec arrachement des macromolécules entre les lèvres de la fissure).

Du fait de la faible force de traînage du réseau atomique les métaux sont *intrinsèquement ductiles*. Même quand ils sont qualifiés de purs, la plupart des métaux contiennent de petites *inclusions* (ou particules) de composés chimiques formés par réaction du métal avec des atomes d'impureté. Dans la zone plastifiée, la déformation se produit autour de ces inclusions, conduisant à la formation de cavités allongées. Au fur et à mesure que la déformation plastique se poursuit, ces cavités se relient les unes aux autres et la fissure progresse par *déchirement ductile*. La déformation plastique en tête de fissure transforme naturellement la fissure étroite en une fissure plus large et cet élargissement diminue la contrainte locale de telle façon qu'à l'extrémité de la fissure elle soit juste suffisante pour entretenir la déformation plastique du matériau écroui à cet endroit. A température ambiante ou au-dessus, presque tous les métaux purs sont résistants à la rupture mais l'ajout d'éléments d'alliages diminue la mobilité des dislocations augmentant la limite élastique et réduisant du même coup la zone plastifiée. La formation de *précipités* ou de structures cristallines de dureté élevée donc *fragiles* permet la propagation de fissures qui ne peuvent plus s'émousser et diminue la résistance à la rupture entraînant une *rupture fragile*. Un traitement thermique approprié est essentiel pour obtenir les propriétés mécaniques souhaitées, c'est tout l'art du métallurgiste.

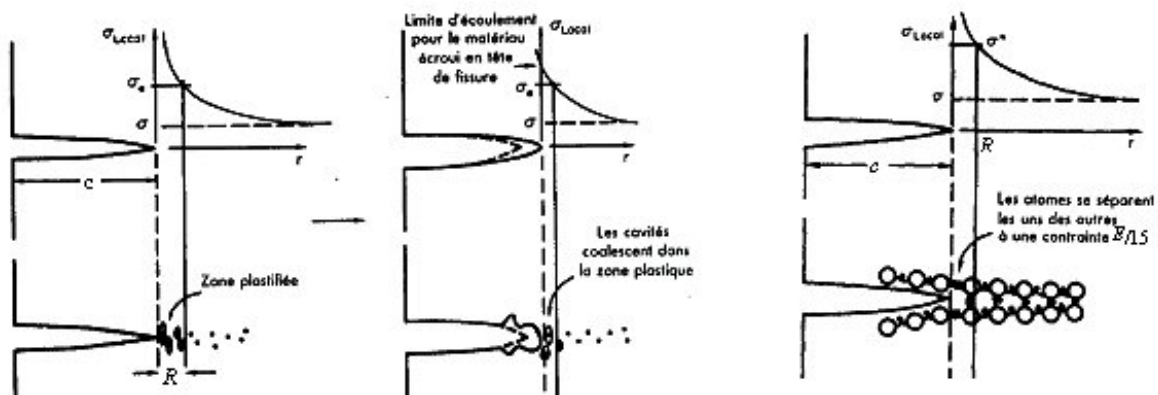


FIG. 5.26 – Mécanismes de rupture : déchirement *ductile* et clivage *fragile*

5.9.2 Le clivage fragile des céramiques

La surface de rupture des matériaux très durs (céramique, verre, ...) présente un faciès très différent. Au lieu d'être très rugueuse, la surface de rupture est plane et sans aspérités suggérant une absence quasi totale de zone de déformation plastique en tête de fissure (R^P grand, K_C faible). La contrainte locale atteint au voisinage de la tête de fissure des valeurs considérables, proches de la contrainte de rupture théorique en traction à condition que la fissure reste étroite. Même si on admet un certain émoussissement de la tête de fissure, la contrainte locale y est néanmoins très supérieure à la limite élastique et les liaisons interatomiques sont littéralement rompues, la fissure se propage par clivage, séparation des plans atomiques, et conduit à des surfaces de rupture *plates* à l'échelle atomique. L'énergie nécessaire à la rupture des liaisons dans un matériau dur est plus faible que celle que nécessaire au déchirement ductile d'où leur *fragilité*.

A basse température, les métaux de structure hexagonale ou cubique centrée deviennent fragiles et rompent par clivage comme le verre. L'abaissement de la température diminuant l'agitation thermique des atomes réduit la mobilité des dislocations par augmentation de la résistance intrinsèque du réseau induisant une augmentation de la limite élastique et une diminution de la taille de la zone plastifiée en tête de fissure jusqu'à ce qu'elle soit devenue si petite que le mode de rupture de déchirement ductile devienne un clivage. Pour certaines compositions d'aciers cette transition ductile-fragile survient à des températures proches de 0°C et les constructions en acier sont plus fragiles en hiver qu'en été.

Des phénomènes semblables apparaissent dans les polymères à la transition vitreuse. En dessous de la T_g les polymères sont beaucoup plus fragiles. De nombreux polymères comme les résines époxydiques sont toujours fragiles (faible G_C) simplement parce qu'à toute température les chaînes sont fortement réticulées par des liaisons covalentes et les fissures ne sont pas émoussées par plastification en tête de

fissure.

5.10 La résistance à la rupture des matériaux fragiles

5.10.1 Résistance à la rupture

Différents essais mécaniques permettent de déterminer la résistance à la rupture des matériaux *fragiles*.

Essai de traction

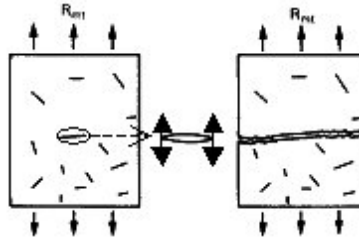


FIG. 5.27 – Matériau fragile : Rupture en traction

L'essai le plus simple est l'essai de traction. Il mesure la contrainte R_t^M nécessaire pour provoquer la propagation instable de la plus longue fissure que contient l'échantillon. Dans un échantillon donné, si la plus longue microfissure la mieux orientée a une longueur $2c_{Max}$ alors c'est cette fissure qui déterminera la résistance à la traction. En effet, cette fissure représente le maillon le plus faible, elle deviendra instable lorsque la contrainte moyenne de traction vérifiera la condition d'amorçage $\sigma^2 \pi c_{Max} = K_C^2$ et provoquera la rupture catastrophique de l'échantillon. La résistance à la traction R_t^M de l'échantillon est donc égale à la contrainte d'amorçage du maillon le plus faible, soit :

$$R_t^M \sim \frac{K_C}{\sqrt{\pi c_{Max}}}$$

Il y a donc deux manières d'améliorer la résistance mécanique des céramiques : diminuer c_{Max} en contrôlant soigneusement la fabrication ou augmenter K_C par alliage ou par constitution d'un composite à partir de cette céramique.

Essai de flexion

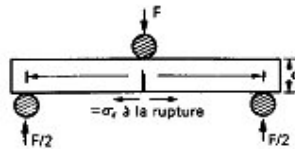


FIG. 5.28 – Matériau fragile : Rupture en flexion

Les essais de traction sur les céramiques sont délicats car elles tendent à se rompre dans les mors de la machine d'essai. Il est beaucoup plus facile de mesurer la force nécessaire pour casser un barreau dans un essai de flexion. La contrainte de traction maximale σ_r en surface du barreau au moment de sa rupture est appelée *module de rupture*. On pourrait penser que σ_r doit être égal à la résistance à la traction R_t^M . En fait, il est légèrement plus élevé (typiquement 1,7 fois plus) car la répartition des contraintes dans l'éprouvette n'est pas homogène. La demi éprouvette supérieure travaille en compression tandis que la demi éprouvette inférieure travaille en traction, cette traction étant d'autant plus forte que l'on se rapproche de la face inférieure et du centre de l'éprouvette, ce qui explique que la rupture se produise à partir de cette face à l'aplomb de l'appui exerçant la force

F. Statistiquement le plus grand défaut a plus de chance de se situer au centre de l'éprouvette, donc dans une zone sous faible contrainte, de sorte que la rupture se déclenchera sur un défaut de taille inférieure dans la zone de forte traction, conduisant donc à une contrainte de rupture σ_r supérieure à R_t^M .

Essai de compression

Le troisième type d'essai est l'essai de compression. Pour les métaux (ou n'importe quel autre solide plastique) la résistance R_c^M mesurée en compression a la même signification que celle R_t^M mesurée en traction. Mais il n'en est pas de même pour les solides fragiles dont la résistance à la compression est environ 15 fois plus élevée, soit : $R_c^M \approx 15R_t^M$. En compression, les fissures se propagent de manière stable et dévient de leur orientation initiale pour se propager parallèlement à l'axe de compression. La rupture n'est pas provoquée par la progression rapide et instable d'une fissure unique comme en traction, mais par la lente progression de nombreuses fissures qui forment une zone d'écrasement. Ce n'est donc pas la longueur c_{Max} de la plus grande fissure qui intervient, mais plutôt la longueur moyenne c_{Moy} . La résistance à la compression est, comme en traction, du type :

$$R_t^M \sim \frac{K_C}{\sqrt{\pi c_{Moy}}}$$

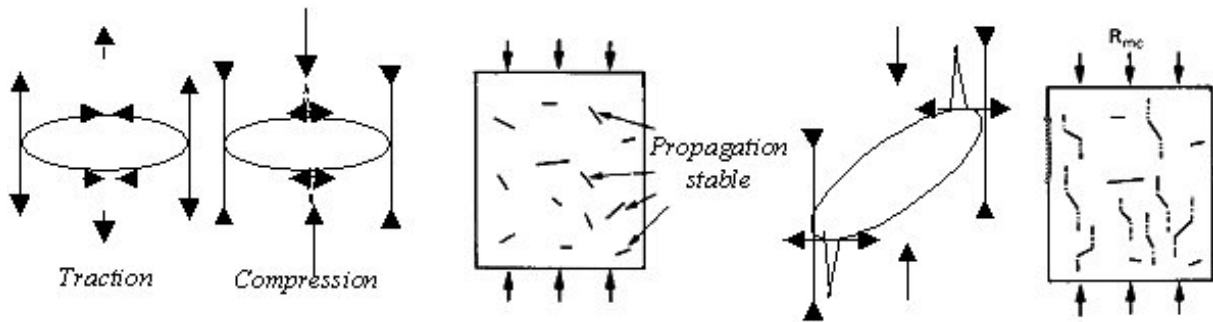


FIG. 5.29 – Matériau fragile : Rupture en compression

Pour expliquer ce phénomène, il faut revenir au modèle de la fissure elliptique aplatie d'Inglis. En traction, lorsque la fissure est orientée perpendiculairement à la contrainte, les pointes de l'ellipse sont soumises à une forte traction provoquant la propagation instable de la fissure. En compression, au contraire, les pointes sont soumises à une forte compression et la fissure stable tend à se fermer. Mais elle est soumise à une contrainte de traction aux extrémités du petit axe et, si on impose à l'infini une contrainte suffisamment grande (beaucoup plus grande qu'en traction traduisant la grande résistance à la compression), deux branchement vont apparaître dans la direction de la compression. Lorsque la fissure s'incline, ces points de branchement se déplacent rapidement vers les pointes avec l'augmentation de l'angle d'inclinaison. Les branchements se produisent perpendiculairement à la direction de la contrainte de traction, donc dans la direction de la compression.

Essai de choc thermique

Quand en versant de l'eau bouillante dans un verre le fond se détache avec un bruit sec, on réinvente l'essai standard de résistance au choc thermique. La rupture provoquée par de brutales variations de température est un problème typique des céramiques. Mais tandis que certaines (comme le verre ordinaire), ne pourront encaisser qu'un choc thermique de 80°C avant de casser, d'autres (comme le nitrure de silicium), pourront supporter une variation brutale de 500°C.

Une manière de mesurer la résistance aux chocs thermiques consiste à laisser tomber dans de l'eau froide un échantillon de céramique chauffé à des températures de plus en plus élevées. L'écart maximum de température ΔT (en °K) auquel il survit sans se casser donne la mesure de sa résistance au choc thermique. Si son coefficient de dilatation thermique est α , la couche superficielle brutalement

refroidie subit une contraction $\alpha\Delta T$. Mais elle fait partie d'un solide beaucoup plus volumineux qui est encore chaud, et ceci l'astreint à conserver sa dimension initiale : elle doit donc supporter une contrainte de traction élastique $E\alpha\Delta T$. Si cette contrainte excède la résistance à la traction R_t^M la surface de la pièce se fissure et finalement s'écaille. Donc la température maximale supportable ΔT_{Max} est donnée par la relation : $E\alpha\Delta T_{Max} = R_t^M$.

Pour le verre ordinaire, α est grand et ΔT_{Max} est faible, mais pour la plupart des céramiques techniques, α est faible et R_t^M est élevée, de sorte qu'elles peuvent être refroidies brutalement de plusieurs centaines de degrés sans se briser.

5.10.2 La statistique de la rupture fragile

Il n'est jamais possible d'affirmer qu'un solide *fragile* ne cassera pas sous une contrainte de traction donnée car la rupture dépend de la taille inconnue du plus grand défaut *maillon le plus faible*. Or celle-ci peut varier de manière considérable d'une éprouvette à l'autre. Seule la *probabilité de survie* d'une pièce en fonction de la contrainte σ externe appliquée peut être déterminée pour un matériau *fragile*.

La craie à tableau est un solide fragile. Certains bâtons de craie sont plus fragiles que d'autres. En écrivant au tableau, on constate qu'en moyenne 3 bâtons sur 10 cassent tandis que les 7 autres survivent. La probabilité de rupture P_R pour cette craie, sollicitée en flexion sous la force normalisée d'écriture vaudra $P_R = 0,3$. Si la pièce est un outil de coupe en céramique, une probabilité de rupture de 1 sur 100 peut être acceptable, car un outil se remplace facilement. Mais s'il s'agit d'un hublot d'installation sous vide, dont la rupture peut causer des blessures, on souhaitera limiter fortement le risque d'accident en choisissant une probabilité de rupture P_R de l'ordre de 10^{-6} . Pour une tuile du bouclier de navette spatiale, quand la rupture d'une sur 10000 peut être fatale, on visera une probabilité de rupture P_R de l'ordre de 10^{-8} .

Si un risque acceptable (la probabilité de rupture) peut être affecté à la fonction remplie par la pièce, il est alors *effectivement* possible de la concevoir de sorte que le risque n'excède pas ce maximum acceptable.

Distribution statistique de défauts

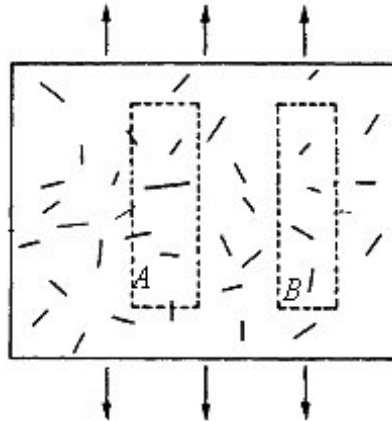


FIG. 5.30 – Distribution statistique de défauts

La craie est une céramique poreuse de faible ténacité $K_C=0,9 \text{ MPa.m}^{1/2}$ mal consolidée, pleine de fissures et de pores. Sa résistance moyenne à la traction R_t^M est de l'ordre de 15 MPa correspondant à une taille de défaut de l'ordre du mm. Mais la craie contient une distribution de défauts de différentes longueurs. Deux morceaux de craie A et B géométriquement identiques peuvent avoir des résistances notablement différentes, d'un facteur 3 ou plus. Ceci provient du fait que l'un (morceau B) a été découpé de telle sorte que, par hasard, il ne contienne que des fissures courtes, tandis que l'autre (morceau A) a été taillé de sorte qu'il contienne l'une des plus longues fissures de la distribution.

Si de petits échantillons géométriquement identiques sont découpés dans un gros bloc de céramique fragile, ils présenteront une *dispersion de résistance mécanique* due à la *dispersion de la taille des*

défauts. En moyenne un gros échantillon ayant plus de chances de contenir l'un des plus longs défauts cassera pour une contrainte plus faible qu'un échantillon plus petit. Il y a *dépendance* de la *résistance* par rapport au *volume*.

Hypothèse du maillon le plus faible

Les ruptures par clivage prennent naissance à partir d'éléments microstructuraux, grains, indentations, qui présentent une distribution statistique et c'est en général le grain le plus gros et le plus favorablement orienté pour cliver, élément le moins résistant, qui déclenche la rupture. La théorie statistique du *maillon le plus faible* s'applique à ces ruptures *fragiles*. Elle repose sur quelques hypothèses fondamentales à vérifier soigneusement en pratique :

- Le solide est considéré comme la juxtaposition de N éléments *parfaitement indépendants* et la rupture de l'élément le plus faible entraîne la rupture du solide entier.
- A chaque élément correspond une probabilité de rupture $P_0(\sigma)$ sous une contrainte σ donnée.

La probabilité de survie de l'élément étant $1 - P_0(\sigma)$, celle des N éléments vaut selon l'hypothèse d'indépendance $[1 - P_0(\sigma)]^N$ et la probabilité de *rupture* $P_R(\sigma) = 1 - [1 - P_0(\sigma)]^N$ s'écrit aussi sous la forme

$$P_R(\sigma) = 1 - \exp(-N \ln[\frac{1}{1 - P_0(\sigma)}]) = 1 - \exp(-N f(\sigma)) \quad \text{avec} \quad f(\sigma) = \ln[\frac{1}{1 - P_0(\sigma)}]$$

où la fonction $P_0(\sigma)$ est inconnue.

Effet de volume

Le volume total V ayant été subdivisé en N éléments de volume V_0 , la probabilité de rupture du solide de volume V s'écrit : $P_R(\sigma, V) = 1 - \exp(-\frac{V}{V_0} f(\sigma))$ fonction croissante de V .

Effet de contrainte inhomogène

Lorsque la pièce est soumise à une contrainte hétérogène, on la divise en un grand nombre de volumes élémentaires ΔV , chacun soumis à une contrainte σ supposée homogène sur ΔV mais fonction de la position du volume ΔV considéré dans la structure. Pour chacun de ces volumes ΔV la probabilité de rupture $P_R(\sigma, \Delta V)$ est donnée par l'expression précédente avec $V = \Delta V$. La probabilité de survie de la pièce est le produit des probabilités de survie de chacun de ses éléments (tous doivent survivre pour que la pièce survive) et vaut :

$$1 - P_R(\sigma, V) = \prod [1 - P_R(\sigma, \Delta V)] = \exp(-\sum \frac{\Delta V}{V_0} f(\sigma)) \quad P_R(\sigma, V) = 1 - \exp(-\int_V f(\sigma) \frac{dV}{V_0})$$

en passant à la limite continue sachant que le volume V_0 reste petit devant le volume dV sur lequel on admet que la contrainte σ est constante. La probabilité de rupture est fonction de la répartition des contraintes dans la pièce. Mais quelle valeur faut-il attribuer à σ ? En général on utilise la plus grande des contraintes principales lorsqu'elle est positive. Ainsi une éprouvette en flexion a une probabilité de rupture plus faible que celle de la même éprouvette en traction sous une contrainte égale à celle qui agit sur la fibre la plus tendue en flexion. En traction, tout le volume est soumis à la contrainte alors qu'en flexion seule une mince couche proche de la surface tendue supporte la contrainte de traction maximale. Le contrainte de rupture en flexion est plus grande que la résistance à la traction.

Si la dépendance en volume est une conséquence directe de l'hypothèse de la théorie du maillon le plus faible, reste à préciser la fonction $f(\sigma)$.

Théorie de Weibull

Weibull a proposé la forme empirique suivante :

$$f(\sigma) = (\frac{\sigma - \sigma_s}{\sigma_u})^m \quad f(\sigma) = (\frac{\sigma}{\sigma_u})^m \quad (5.10)$$

qui rend bien compte de la dispersion expérimentale des contraintes de rupture des matériaux fragiles en traction. Dans cette expression, σ_s représente un seuil de contrainte en dessous duquel la probabilité de rupture est nulle. Dans la plupart des cas on suppose que $\sigma_s = 0$, ce que nous ferons par la suite. Le module de Weibull m est un indicateur de la dispersion. Plus il est faible, plus cette dispersion est importante :

- Pour les faibles module de Weibull, ($m < 20$), la distribution des défauts est *très* variable d'un échantillon à l'autre, d'où la dispersion des contraintes de rupture.
- Pour les forts module de Weibull, la distribution des défauts est *très peu* variable d'un échantillon à l'autre, d'où faible dispersion des contraintes de rupture, la contrainte de rupture σ_R est une grandeur quasi déterministe.

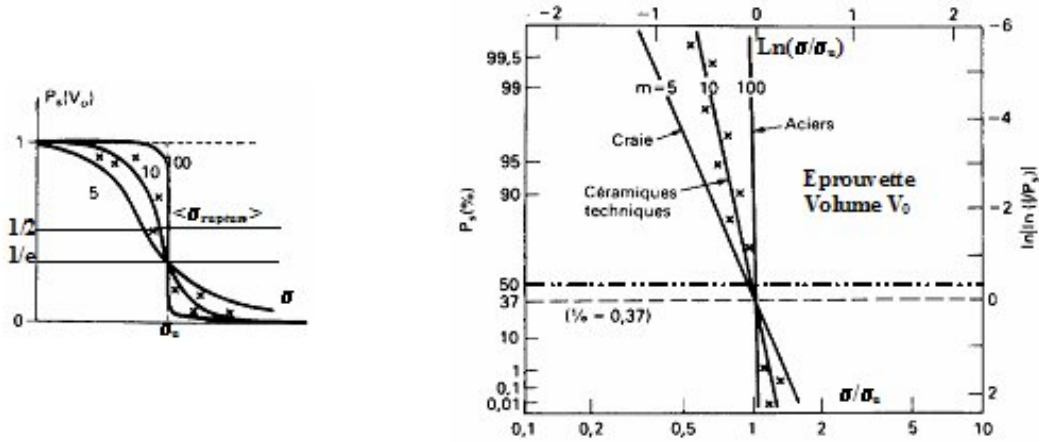


FIG. 5.31 – Loi de Weibull de la rupture fragile

En mesurant la probabilité de survie $P_S(\sigma, V_0) = 1 - P_R(\sigma, V_0)$ comme le nombre d'échantillons de même volume V_0 n'ayant pas cassé sous la contrainte σ , la loi de Weibull

$$P_S(\sigma, V_0) = 1 - P_R(\sigma, V_0) = \exp\left[-\left(\frac{\sigma}{\sigma_u}\right)^m\right]$$

est vérifiée si les points s'alignent dans le plan $\ln(\ln[\frac{1}{1-P_R}])$, $\ln \sigma$ sur une droite dont la pente est égale au module de Weibull m . A contrainte nulle, $P_S = 1$, tous les échantillons survivent. Lorsque σ augmente P_S diminue tendant vers 0 pour les fortes contraintes et tous les échantillons cassent. σ_u est la contrainte telle que $P_S(\sigma_u, V_0) = \frac{1}{e} \approx 0,37$ laissant survivre 37% des échantillons.

Le volume effectif et la contrainte de Weibull.

Dans la loi de Weibull complète $P_S(\sigma, V) = \exp(-\frac{V\sigma^m}{V_0\sigma_u^m})$ intégrant les effets de volume, les paramètres V_0 et σ_u ne sont pas indépendants, seul leur produit $V_0\sigma_u^m$ intervient. σ_{Max} étant dans une pièce de volume V la valeur *maximale* de la *contrainte majeure positive* solution du problème élastique en contrainte inhomogène la probabilité de *survie* de la pièce s'écrit :

$$P_S(\sigma, V) = \exp\left(-\int_V \left(\frac{\sigma}{\sigma_u}\right)^m \frac{dV}{V_0}\right) = \exp\left(-\left(\frac{\sigma_{Max}}{\sigma_u}\right)^m \frac{V_{eff}}{V_0}\right) \quad \text{avec} \quad V_{eff} = \int_V \left(\frac{\sigma}{\sigma_{Max}}\right)^m dV$$

La probabilité de survie d'une pièce soumise à contrainte inhomogène de maximum σ_{Max} est égale à celle d'une pièce équivalente de volume V_{eff} en état de contrainte homogène σ_{Max} . L'application à la flexion trois points conduit à la relation $\sigma_r = R_t^M [2(m+1)^2]^{\frac{1}{m}}$ entre la résistance en traction R_t^M et le module de rupture en flexion σ_r , soit $\sigma_r \approx 1,7 R_t^M$ annoncé pour la valeur typique $m = 10$ des céramiques.

On peut également définir la contrainte de Weibull σ_w (liée au volume effectif V_{eff}) telle que :

$$P_S(\sigma, V) = \exp\left(-\int_V \left(\frac{\sigma}{\sigma_u}\right)^m \frac{dV}{V_0}\right) = \exp\left\{-\left(\frac{\sigma_w}{\sigma_u}\right)^m\right\} \quad \text{avec} \quad \sigma_w = \left[\frac{1}{V_0} \int_V \sigma^m dV\right]^{\frac{1}{m}} \quad \text{et} \quad \frac{\sigma_w}{\sigma_{Max}} = \left(\frac{V_{eff}}{V_0}\right)^{\frac{1}{m}}$$

L'essai d'épreuve ou comment tricher avec la statistique.

Dans un lot de pièces avec une certaine distribution de résistances, on élimine les plus faibles en les chargeant toutes sous une contrainte d'épreuve donnée. Celles qui contiennent des fissures de grande longueur cassent et il ne reste que la fraction résistante à la contrainte d'épreuve. Statistiquement parlant, les essais d'épreuve constituent une sélection qui rejette la queue de la distribution du côté

des faibles résistances. C'est une méthode largement utilisée pour réduire la probabilité de rupture des pièces critiques dont l'efficacité est remise en cause par la transformation lente au cours du temps des petits défauts inoffensifs en fissures dangereuses de grande dimension. Il faut donc éprouver la pièce à intervalles réguliers tout au long de son utilisation. Ce type de procédure est également imposé par la réglementation pour les pièces critiques en matériau ductile comme les réservoirs d'acier sous pression (chaudières, bouteille de gaz, ...) pour détecter la croissance des fissures de fatigue.

Les limites de l'approche statistique

Cette approche n'est plus valide lorsqu'une des hypothèses de départ, notamment celle concernant l'indépendance des éléments de volume est mise en défaut.

- Si la contrainte normale est négative, une propagation de la microfissure est possible, mais elle se fait en général avec une bifurcation telle que le facteur d'intensité de contrainte diminue. Une telle fissure cesse d'être activée. Elle participe néanmoins à un endommagement progressif du matériau, mais l'hypothèse du maillon le plus faible n'est pas utilisable.
- Il en est de même si les microfissures se propagent mais s'arrêtent sur des obstacles qui les stabilisent (béton et céramiques).

5.11 Résumé Rupture

La rupture correspond à une **résistance limite du matériau en traction**.

La contrainte de rupture effective

$$\sigma_R^2 c = G_C E \quad K_C = \sqrt{G_C E}$$

est liée à la taille c du défaut. Elle présente une dispersion liée à la distribution de taille des défauts. Le matériau est caractérisé par sa ténacité K_C ($\text{Mpa}\sqrt{\text{m}}$) ou son énergie de rupture G_C (J.m^{-2}).

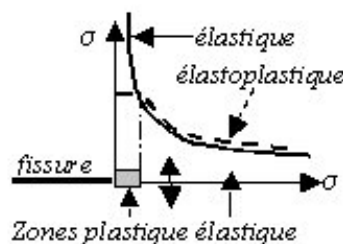
Rupture fragile et rupture ductile

Rupture fragile	Rupture ductile
Surface de rupture lisse	Surface de rupture rugueuse
G_C, K_C faibles	G_C, K_C forts
Clivage des liaisons	Endommagement plastique
$G_C \approx \gamma$	

La dimension caractéristique R de la zone plastique en tête de fissure :

$$R \approx \left(\frac{K_C}{R^P}\right)^2 \quad \text{avec } R^P \text{ seuil plastique}$$

est *petite* pour les *corps fragiles*, *grande* pour les *corps ductiles* (tenaces).



Modèle élastique

Au voisinage de la tête de fissure le champ de contrainte ne dépend que de la *géométrie de la fissure*

et du *type de chargement*. Il est caractérisé par le *facteur d'intensité de contrainte* K :

$$\bar{\sigma} = \frac{K}{\sqrt{2\pi r}} \bar{f}(\theta)$$

Ouverture et propagation

La *propagation* d'une fissure n'est possible que si l'énergie mécanique mobilisable au voisinage de la fissure est suffisante pour contrebalancer l'énergie de rupture nécessaire à son allongement.

Pour agrandir la surface d'un défaut il faut déchirer la matière ce qui consomme une énergie de séparation $dU^S = G_C dS$ produit de l'énergie de séparation du matériau par l'aire déchirée.

- *Ouverture du défaut.* Tant que l'énergie mécanique dU^{MEC} restituée au cours de cette déchirure est plus faible que l'énergie dU^S nécessaire à la séparation, la déchirure ne se produit pas et le défaut reste stable, autrement dit il s'ouvre sans s'agrandir.

- *Propagation du défaut.* Lorsque l'énergie mécanique emmagasinée U^{MEC} est suffisante pour que la fraction dU^{MEC} restituée au cours de la déchirure dS soit supérieure à l'énergie consommée dU^S , le système libère plus d'énergie qu'il n'en consomme et le défaut, devenu instable, s'agrandit brusquement.

Condition d'amorçage et taux de restitution de l'énergie

L'énergie totale U de l'ensemble constitué d'un matériau contenant une fissure et du système de mise en charge doit rester constante.

$$U = U^{EXT} + U^{EL} + U^S = U^{MEC} + U^S = \text{Cte}$$

Cette énergie se décompose en :

- U^S Énergie de *séparation* utilisée pour créer la fissure.
- U^{EL} Énergie *élastique stockée* au sein de la plaque, potentiel des efforts internes.
- U^{EXT} Énergie *potentielle des efforts imposés*.

Avec $U^{MEC} = U^{EXT} + U^{EL}$ énergie *mécanique totale* du système. Ces différentes énergies dépendent bien évidemment de la taille de fissure. La longueur d'équilibre de la fissure est donc fixée par la condition :

$$\frac{dU}{dS} = \frac{dU^{MEC}}{dS} + \frac{dU^S}{dS} = 0$$

Si l'aire de fissure s'accroît de $dS > 0$, $\frac{dU^S}{dS} > 0$ et $\frac{dU^{MEC}}{dS} < 0$. Accroître la longueur de fissure consomme de l'énergie et l'accroissement d'énergie de séparation est prélevé sur l'énergie mécanique disponible U^{MEC} . La quantité $G = -\frac{dU^{MEC}}{dS}$ est appelée *taux de restitution d'énergie*. Le critère de rupture ou condition d'amorçage s'écrit :

$$\frac{dU}{dS} = G_C - G = 0 \quad \text{ou} \quad G = G_C \quad K = K_C$$

L'équilibre $G = G_C$ est *instable* si $\frac{d^2U}{dS^2} < 0$, soit $\frac{dG}{dS} > 0$ et *stable* si $\frac{d^2U}{dS^2} > 0$, soit $\frac{dG}{dS} < 0$.

Stabilité et propagation

Les conditions de contrôle de la propagation d'une fissure sont :

v étant la vitesse de propagation de la fissure.

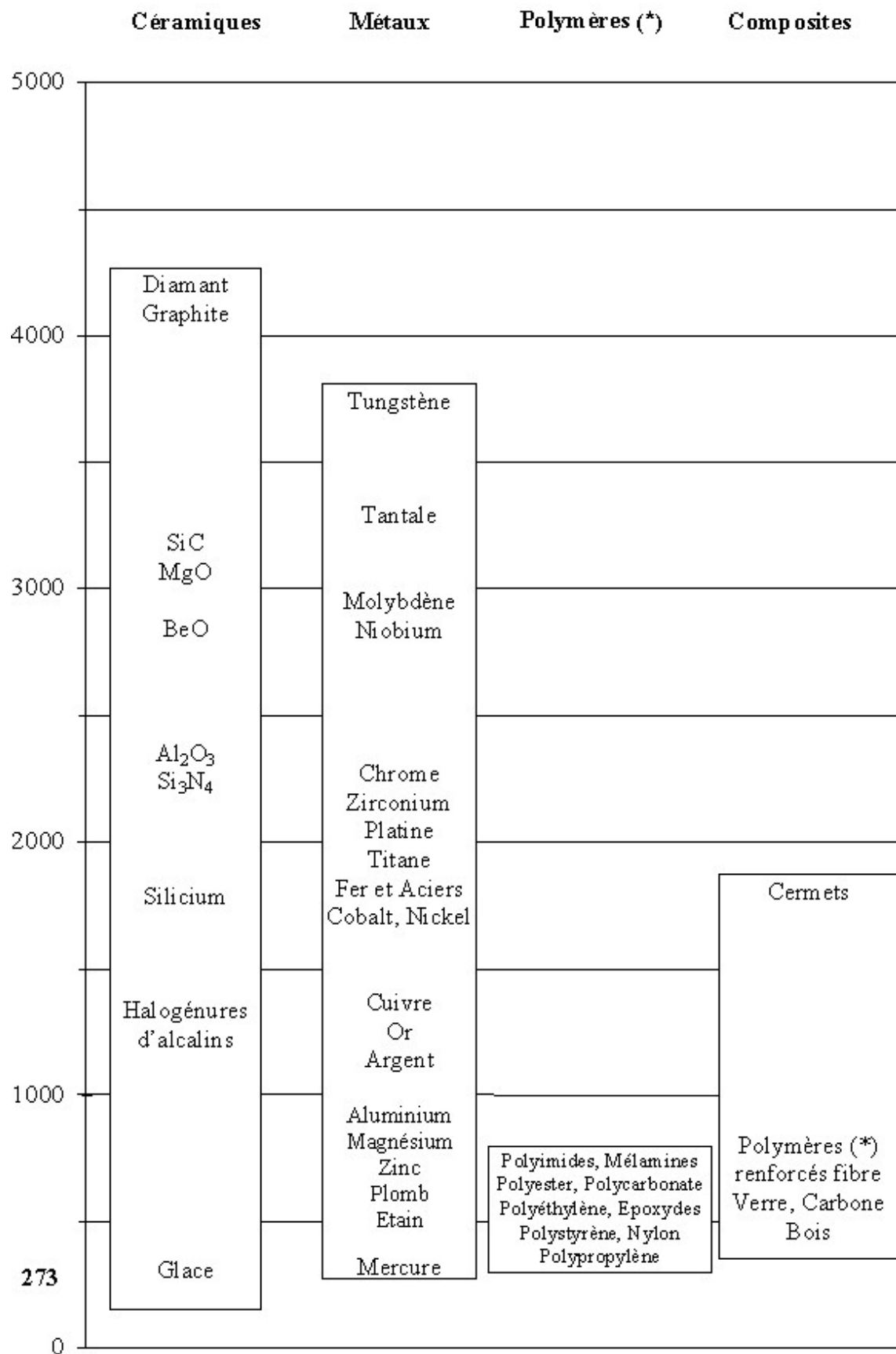
$G < G_C$ <i>Fermeture</i>	$G = G_C$ <i>Équilibre</i> ($v = 0$)	$G > G_C$ <i>Propagation</i> ($v > 0$)
	$\frac{dG}{dS} \leq 0$ Stable	$\frac{dG}{dv} \leq 0$ Contrôlée
	$\frac{dG}{dS} > 0$ Instable	$\frac{dG}{dv} > 0$ Catastrophique

Annexe A

Propriétés mécaniques des matériaux

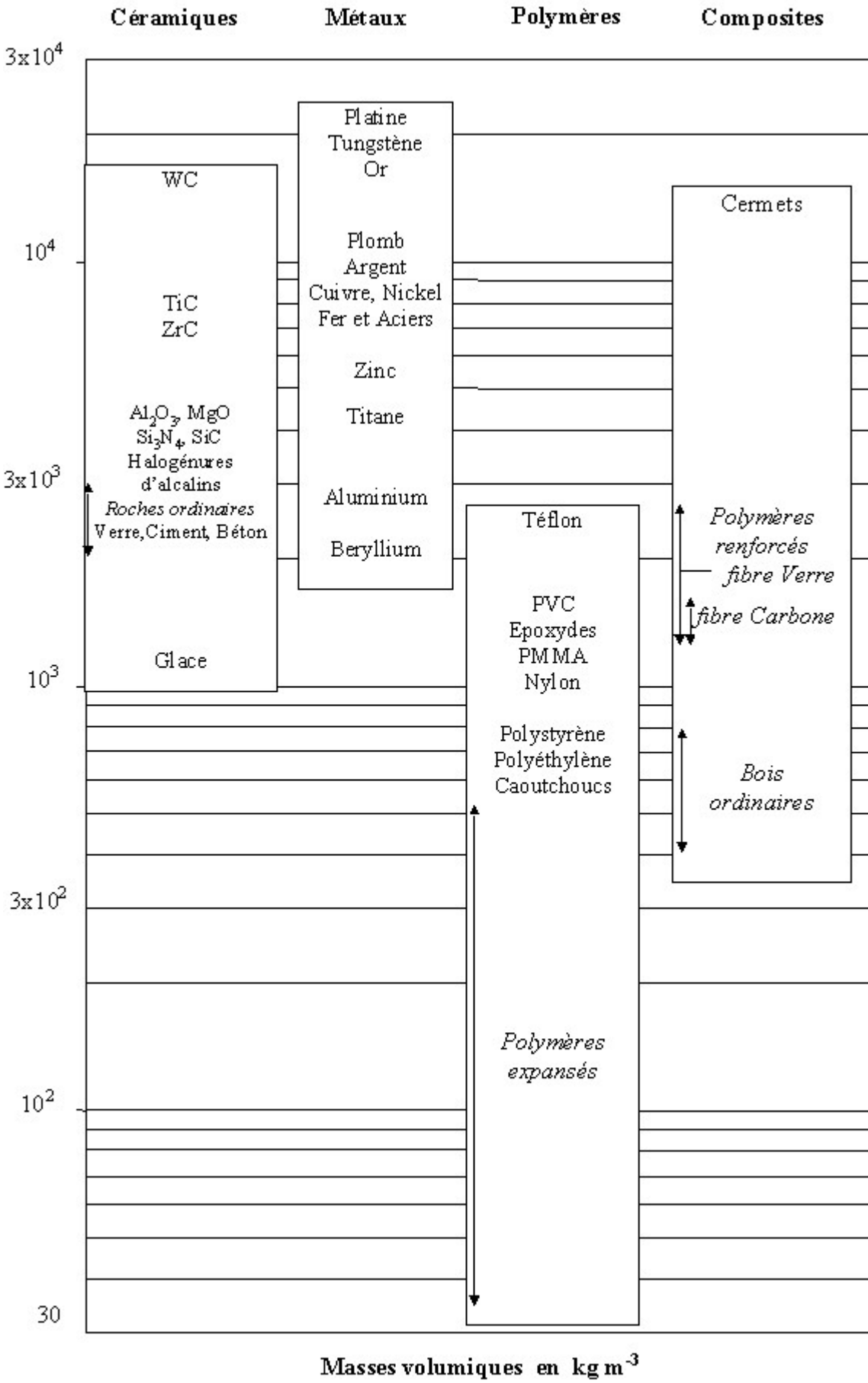
1. Températures de fusion et de ramollissement
2. Masse volumique
3. Echelles de structure des matériaux
4. Module d'Young E
5. Limite d'élasticité et résistance à la traction
6. Limite d'élasticité normalisée
7. Ductilité en traction - allongement à rupture
8. Ténacité
9. Energie de rupture

A.1 Températures de fusion et de ramollissement(*) en °K

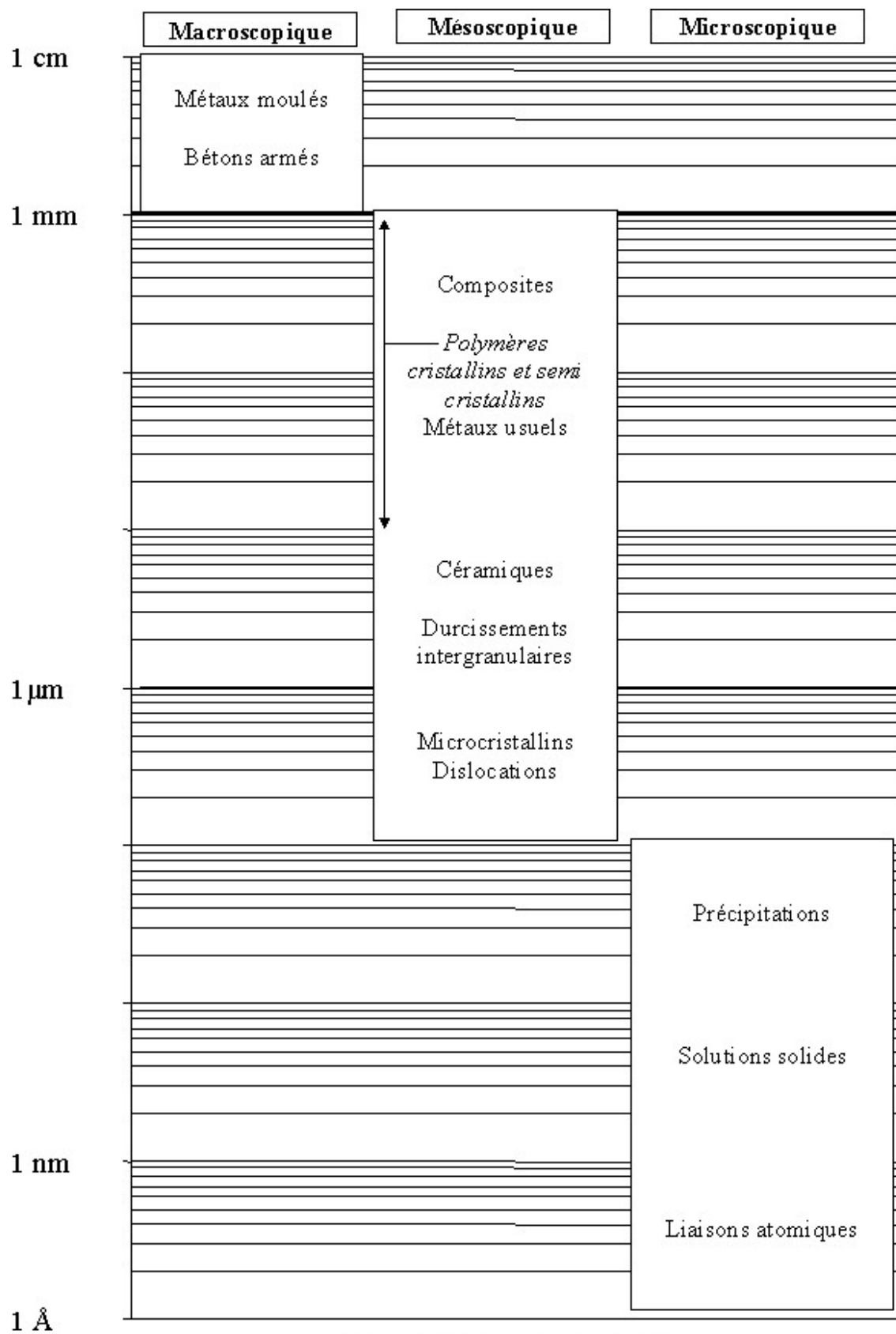


Températures de fusion ou de ramollissement (*) en °K

A.2 Masse volumique en kg.m⁻³

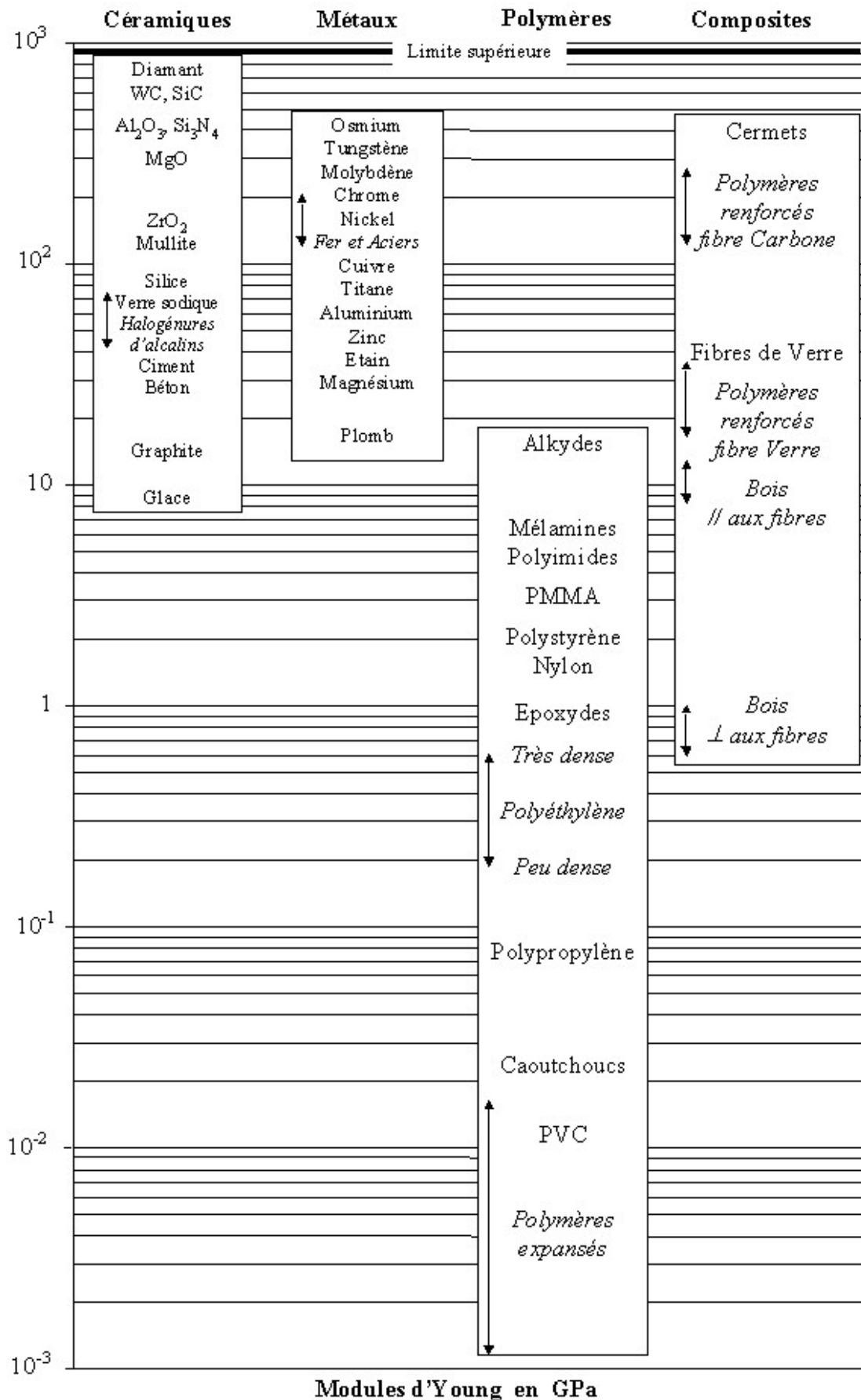


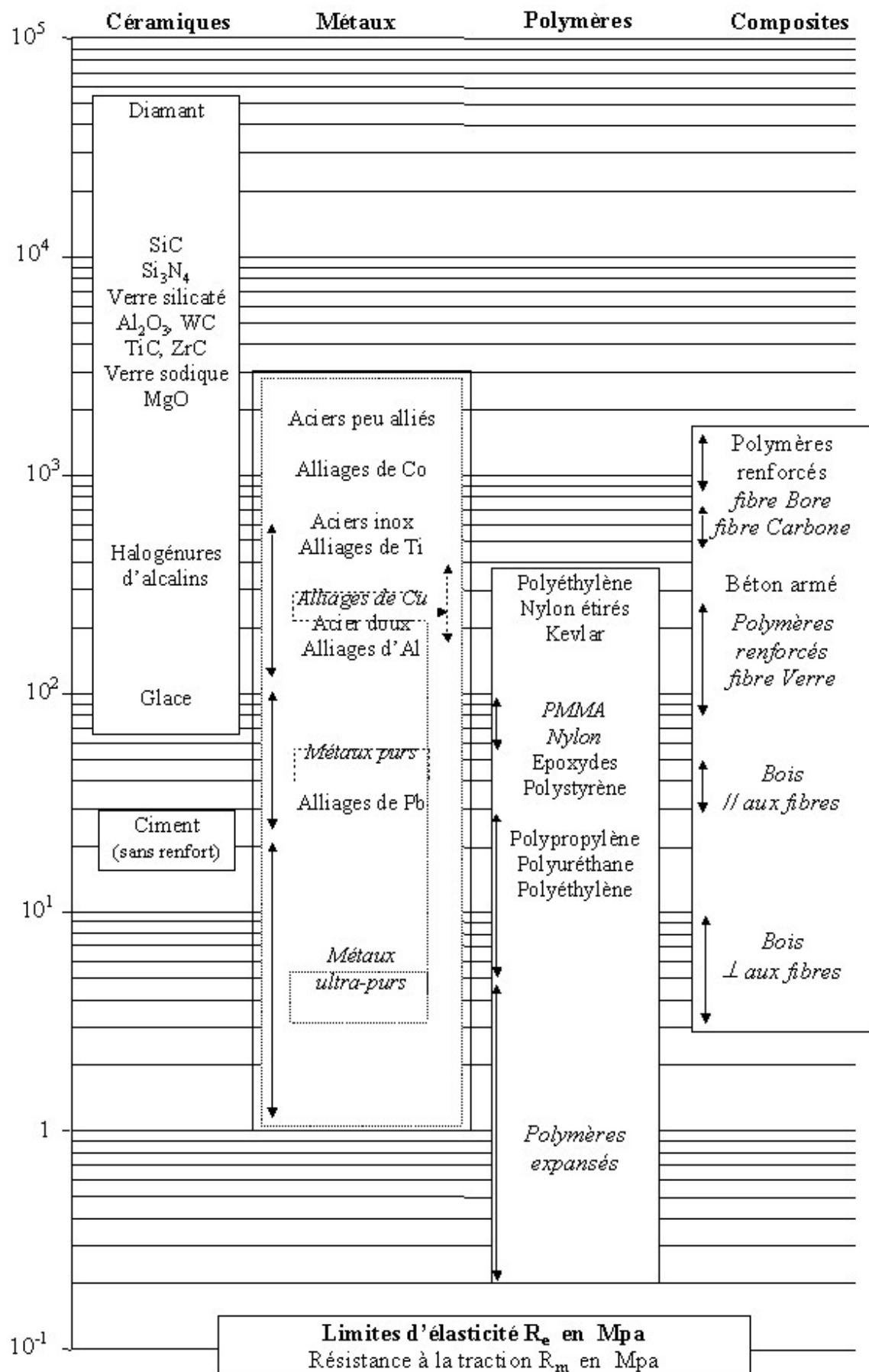
A.3 Echelles de structure des matériaux



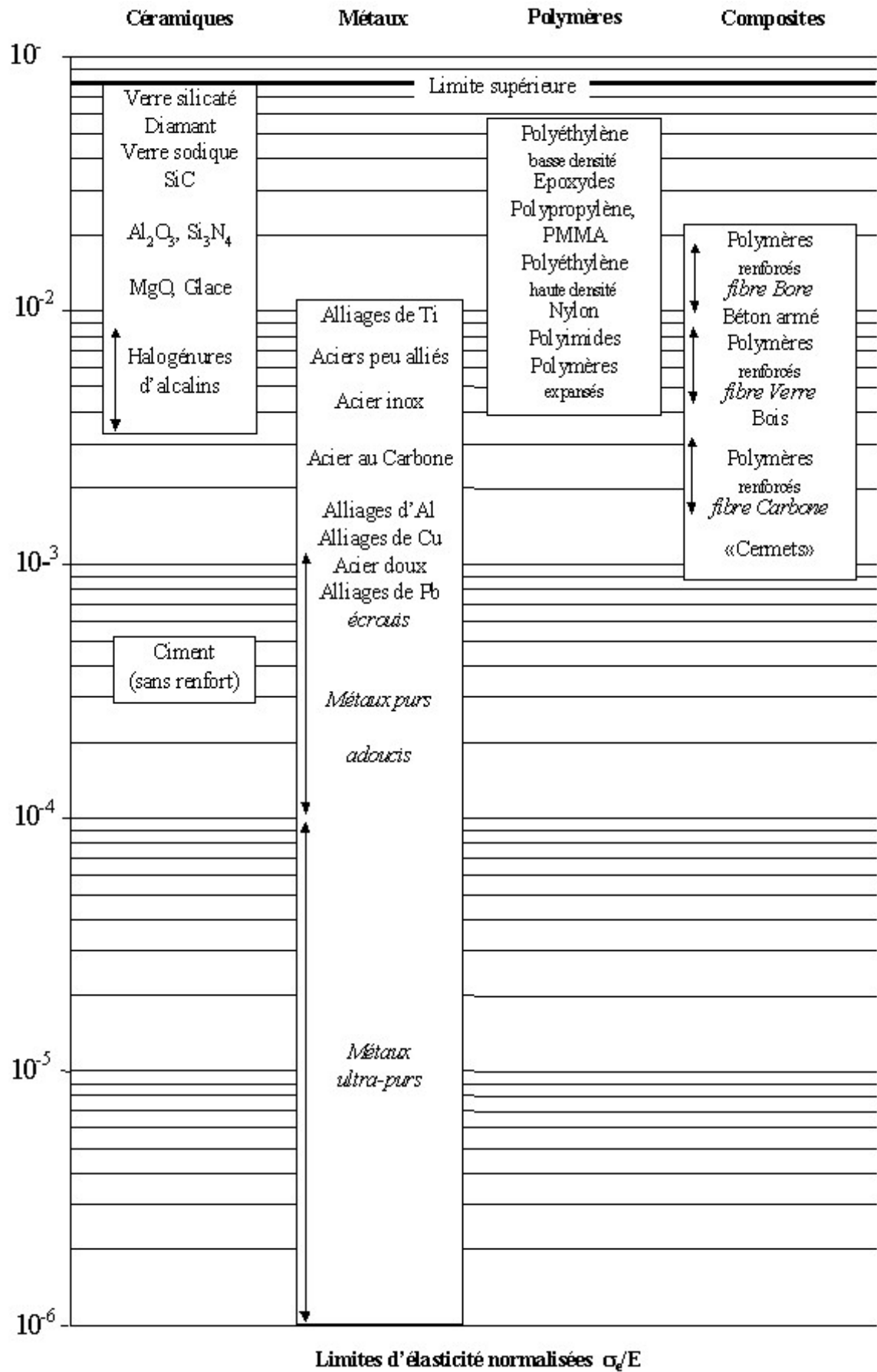
Echelles de Structure des Matériaux

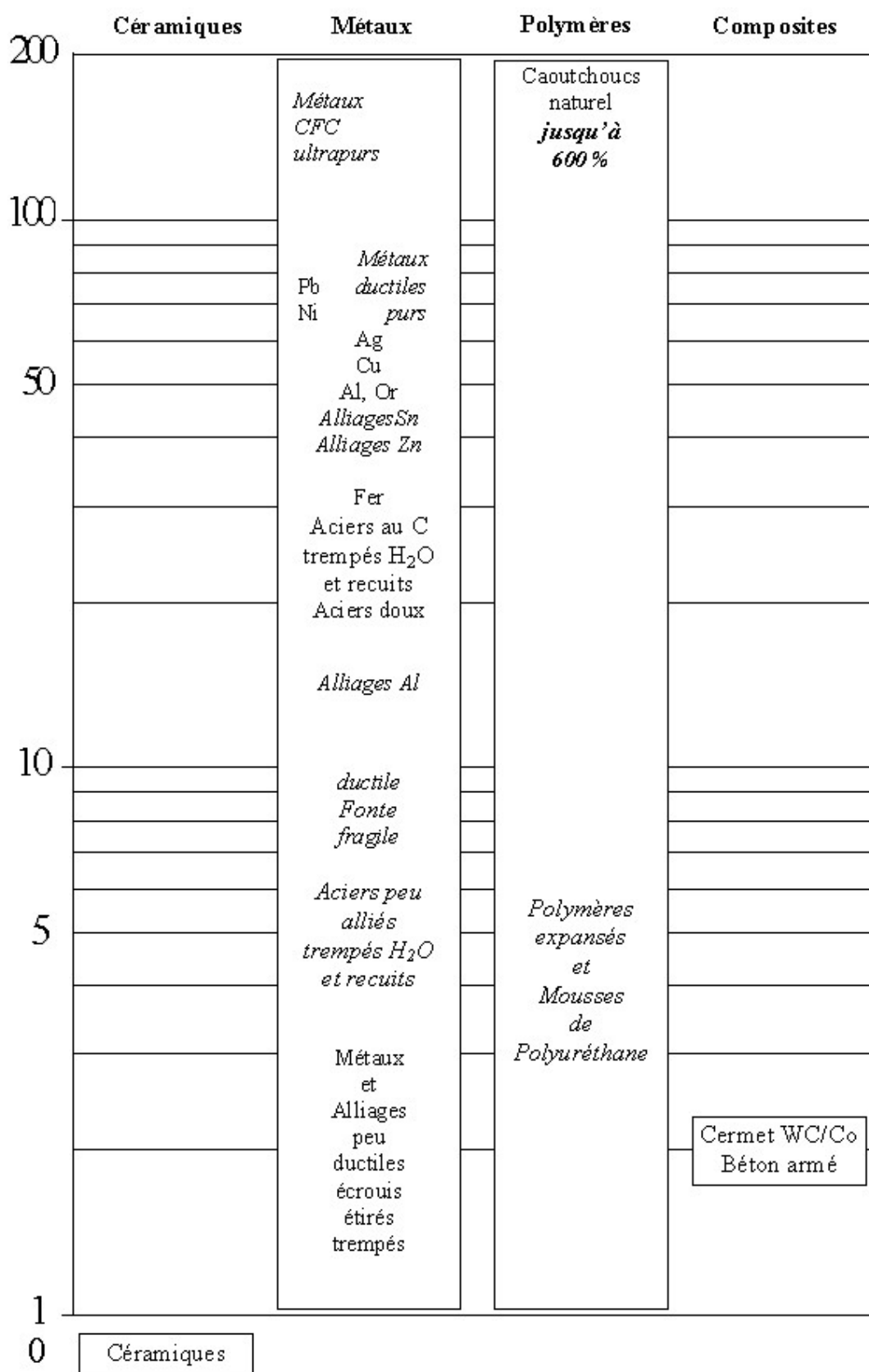
A.4 Module d'Young en Gpa

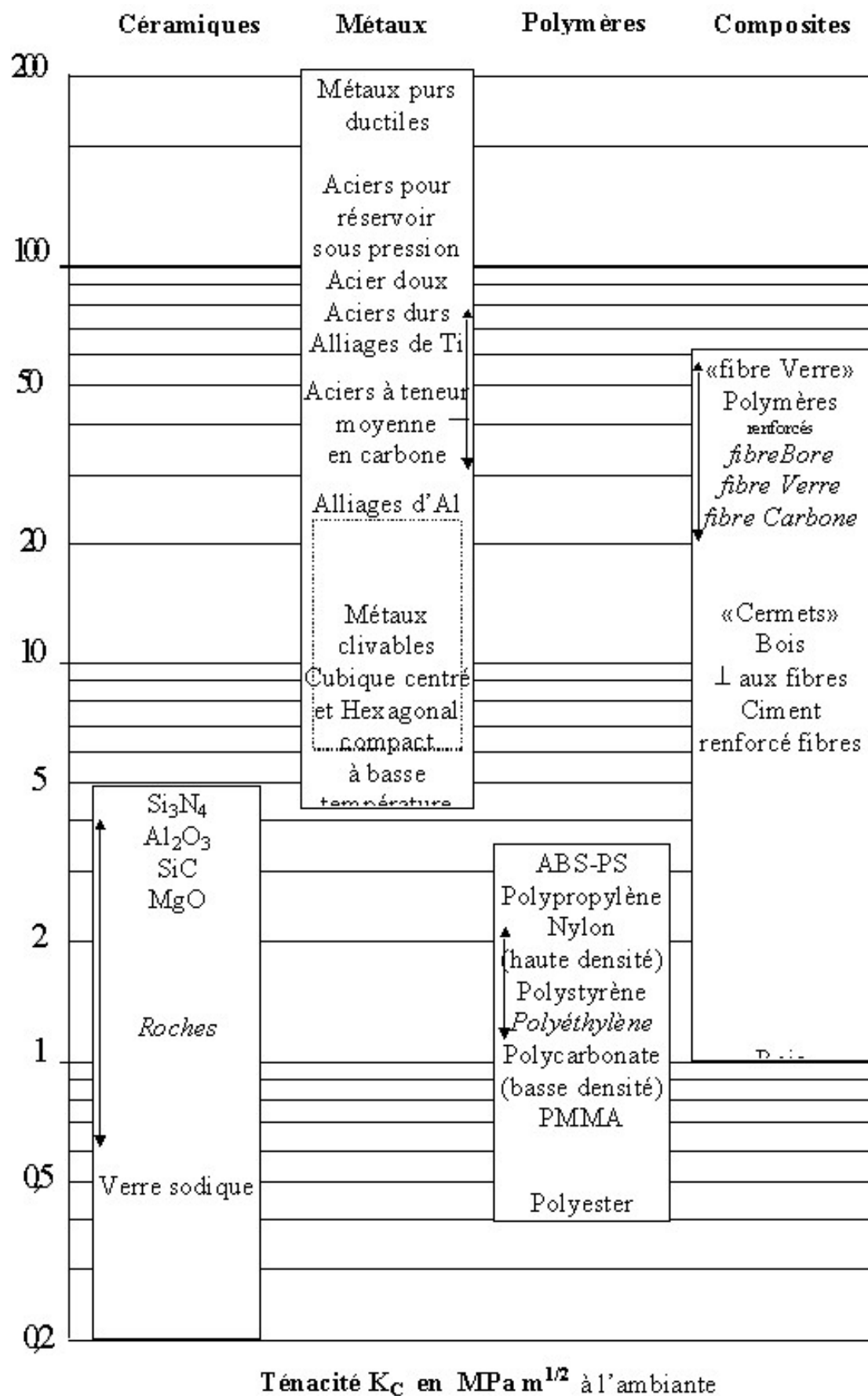


A.5 Limite d'élasticité R_e et résistance à la traction R_m 

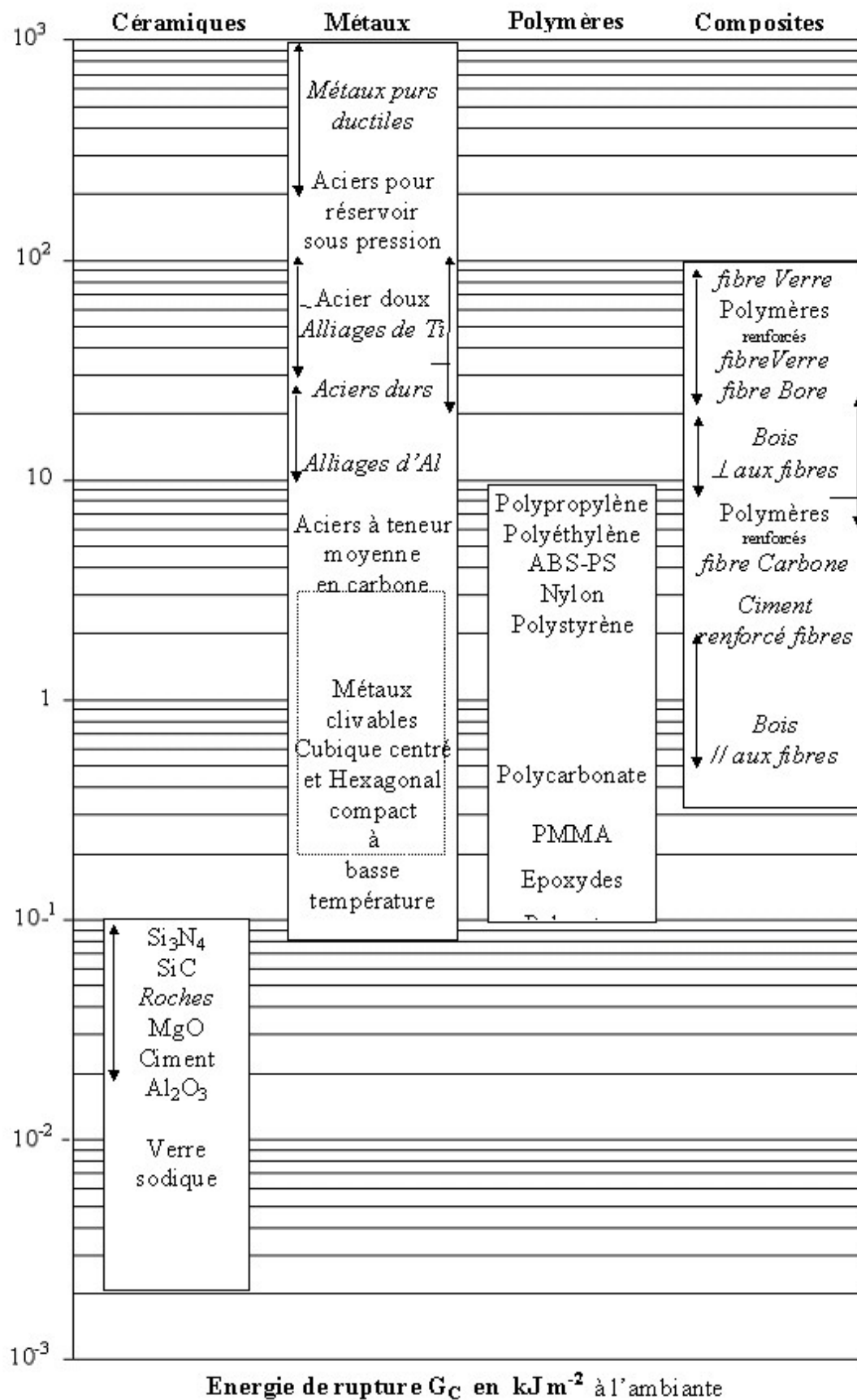
A.6 Limite d'élasticité normalisée : $\frac{R_e}{E}$



A.7 Ductilité en traction - allongement à rupture A_R en %Ductilité en traction - Allongement à Rupture A_R en %

A.8 Ténacité K_C en $MPa.m^{1/2}$ à l'ambiante

A.9 Energie de rupture G_C en kJ.m^{-2} à l'ambiante

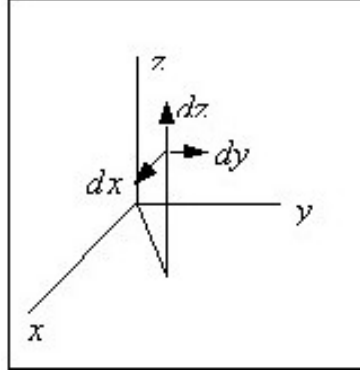


Annexe B

Opérateurs différentiels - Formulaire

1. Coordonnées cartésiennes
2. Coordonnées polaires
3. Coordonnées sphériques

B.1 Coordonnées cartésiennes



Coordonnées : x, y, z , Accroissements : dx, dy, dz , Longueur : $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$

B.1.1 Scalaire ϕ

$$\vec{F} = \mathbf{Grad} \phi = \begin{vmatrix} \frac{\partial \phi}{\partial x} \\ \frac{\partial \phi}{\partial y} \\ \frac{\partial \phi}{\partial z} \end{vmatrix} \quad \Delta \phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2}$$

B.1.2 Vecteur u

$$\bar{\bar{G}} = \mathbf{Grad} \vec{u} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u_x}{\partial x} & \frac{\partial u_x}{\partial y} & \frac{\partial u_x}{\partial z} \\ \frac{\partial u_y}{\partial x} & \frac{\partial u_y}{\partial y} & \frac{\partial u_y}{\partial z} \\ \frac{\partial u_z}{\partial x} & \frac{\partial u_z}{\partial y} & \frac{\partial u_z}{\partial z} \end{vmatrix} \quad \mathbf{Div} \vec{u} = \mathbf{Tr} \bar{\bar{\epsilon}} = \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z}$$

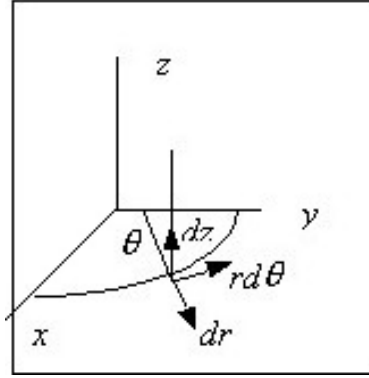
$$\mathbf{Rot} \vec{u} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u_z}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial z} \\ \frac{\partial u_x}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial x} \\ \frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y} \end{vmatrix} \quad \Delta \vec{u} = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} \\ \frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial z^2} \\ \frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} \end{vmatrix}$$

B.1.3 Contrainte $\bar{\bar{\sigma}}$ et Déformation $\bar{\bar{\epsilon}}$

$$\mathbf{Div}_D \bar{\bar{\sigma}} = \begin{vmatrix} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} \\ \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial z} \\ \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} \end{vmatrix}$$

$$\bar{\bar{\epsilon}} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u_x}{\partial x} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y} \right) & \frac{\partial u_y}{\partial y} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial z} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_z}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial z} \right) & \frac{\partial u_z}{\partial z} \end{vmatrix}$$

B.2 Coordonnées polaires



Coordonnées : r, θ, z , Accroissements : $dr, r d\theta, dz$, Longueur : $ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + dz^2$

B.2.1 Scalaire ϕ

$$\vec{F} = \mathbf{Grad}\phi = \begin{vmatrix} \frac{\partial\phi}{\partial r} \\ \frac{\partial\phi}{r\partial\theta} \\ \frac{\partial\phi}{\partial z} \end{vmatrix} \quad \Delta\phi = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial\phi}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2\phi}{r^2\partial\theta^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}$$

B.2.2 Vecteur u

$$\vec{\bar{G}} = \mathbf{Grad}\vec{u} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u_r}{\partial r} & \frac{1}{r} \left(\frac{\partial u_r}{\partial\theta} - u_\theta \right) & \frac{\partial u_r}{\partial z} \\ \frac{\partial u_\theta}{\partial r} & \frac{1}{r} \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial\theta} + u_r \right) & \frac{\partial u_\theta}{\partial z} \\ \frac{\partial u_z}{\partial r} & \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial\theta} & \frac{\partial u_z}{\partial z} \end{vmatrix} \quad \text{Div}\vec{u} = \text{Tr}\vec{\bar{G}} = \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{\partial u_\theta}{r\partial\theta} + \frac{\partial u_z}{\partial z}$$

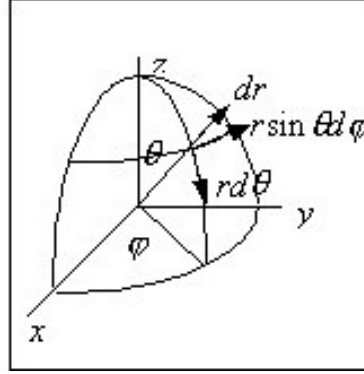
$$\mathbf{Rot}\vec{u} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u_z}{r\partial\theta} - \frac{\partial u_\theta}{\partial z} \\ \frac{\partial u_r}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial r} \\ \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{\partial u_r}{r\partial\theta} + \frac{u_\theta}{r} \end{vmatrix} \quad \Delta\vec{u} = \begin{vmatrix} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u_r}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 u_r}{r^2\partial\theta^2} + \frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2} - \frac{2\partial u_\theta}{r^2\partial\theta} - \frac{u_r}{r^2} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u_\theta}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 u_\theta}{r^2\partial\theta^2} + \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial z^2} + \frac{2\partial u_r}{r^2\partial\theta} - \frac{u_\theta}{r^2} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 u_z}{r^2\partial\theta^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} \end{vmatrix}$$

B.2.3 Contrainte $\vec{\bar{\sigma}}$ et Déformation $\vec{\bar{\varepsilon}}$

$$\text{Div}_D\vec{\bar{\sigma}} = \begin{vmatrix} \frac{\partial\sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial\sigma_{r\theta}}{\partial\theta} + \frac{\partial\sigma_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_{rr}-\sigma_{\theta\theta}}{r} \\ \frac{\partial\sigma_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial\sigma_{\theta\theta}}{\partial\theta} + \frac{\partial\sigma_{\theta z}}{\partial z} + \frac{2\sigma_{r\theta}}{r} \\ \frac{\partial\sigma_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial\sigma_{\theta z}}{\partial\theta} + \frac{\partial\sigma_{zz}}{\partial z} + \frac{\sigma_{rz}}{r} \end{vmatrix}$$

$$\vec{\bar{\varepsilon}} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u_r}{\partial r} & \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{r} \left(\frac{\partial u_r}{\partial\theta} - u_\theta \right) + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} \right\} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) \\ \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{r} \left(\frac{\partial u_r}{\partial\theta} - u_\theta \right) + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} \right\} & \frac{1}{r} \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial\theta} + u_r \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial\theta} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial\theta} \right) & \frac{\partial u_z}{\partial z} \end{vmatrix}$$

B.3 Coordonnées sphériques



Coordonnées : r, θ, φ , Accroissements : $dr, r d\theta, r \sin \theta d\varphi$, Longueur : $ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2$

B.3.1 Scalaire ϕ

$$\vec{F} = \mathbf{Grad} \phi = \begin{pmatrix} \frac{\partial \phi}{\partial r} \\ \frac{\partial \phi}{r \partial \theta} \\ \frac{\partial \phi}{r \sin \theta \partial \varphi} \end{pmatrix} \quad \Delta \phi = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \varphi^2}$$

B.3.2 Vecteur u

$$\vec{G} = \mathbf{Grad} \vec{u} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_r}{\partial r} & \frac{1}{r} \left(\frac{\partial u_r}{\partial \theta} - u_\theta \right) & \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} - \frac{u_\varphi}{r} \\ \frac{\partial u_\theta}{\partial r} & \frac{1}{r} \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + u_r \right) & \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u_\theta}{\partial \varphi} - \frac{u_\varphi}{r} \cot \theta \\ \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} & \frac{1}{r} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \theta} & \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{u_r}{r} + \frac{u_\theta}{r} \cot \theta \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{Div} \vec{u} = \mathbf{Tr} \vec{G} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial (r^2 u_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial (u_\theta \sin \theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi}$$

$$\mathbf{Rot} \vec{u} = \begin{pmatrix} \frac{1}{r \sin \theta} \left\{ \frac{\partial (u_\varphi \sin \theta)}{\partial \theta} - \frac{\partial u_\theta}{\partial \varphi} \right\} \\ \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} - \frac{1}{r} \frac{\partial (r u_\varphi)}{\partial r} \\ \frac{1}{r} \left\{ \frac{\partial (r u_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \right\} \end{pmatrix} \quad \Delta \vec{u} = \begin{pmatrix} \Delta u_r - \frac{2}{r^2} \left\{ u_r + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial (u_\theta \sin \theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} \right\} \\ \Delta u_\theta + \frac{2}{r^2} \left\{ \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{u_\theta}{2 \sin^2 \theta} - \frac{\cos \theta}{\sin^2 \theta} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} \right\} \\ \Delta u_\varphi + \frac{2}{r^2 \sin^2 \theta} \left\{ \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} + \cot \theta \frac{\partial u_\theta}{\partial \varphi} - \frac{u_\varphi}{2 \sin \theta} \right\} \end{pmatrix}$$

B.3.3 Contrainte $\bar{\sigma}$ et Déformation $\bar{\varepsilon}$

$$\mathbf{Div}_D \bar{\sigma} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \sigma_{r\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{1}{r} (2\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta} - \sigma_{\varphi\varphi} + \sigma_{r\theta} \cot \theta) \\ \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \sigma_{\theta\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{1}{r} (3\sigma_{r\theta} + (\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{\varphi\varphi}) \cot \theta) \\ \frac{\partial \sigma_{r\varphi}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta\varphi}}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \sigma_{\varphi\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{1}{r} (3\sigma_{r\varphi} + 2\sigma_{\theta\varphi} \cot \theta) \end{pmatrix}$$

$$\bar{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_r}{\partial r} & \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{r} \left(\frac{\partial u_r}{\partial \theta} - u_\theta \right) \frac{\partial u_\theta}{\partial r} \right\} & \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} - \frac{u_\varphi}{r} + \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} \right\} \\ \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{r} \left(\frac{\partial u_r}{\partial \theta} - u_\theta \right) \frac{\partial u_\theta}{\partial r} \right\} & \frac{1}{r} \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + u_r \right) & \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u_\theta}{\partial \varphi} - \frac{u_\varphi}{r} \cot \theta + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \theta} \right\} \\ \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} - \frac{u_\varphi}{r} + \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} \right\} & \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u_\theta}{\partial \varphi} - \frac{u_\varphi}{r} \cot \theta + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \theta} \right\} & \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{u_r}{r} + \frac{u_\theta}{r} \cot \theta \end{pmatrix}$$

Annexe C

Bibliographie

Mécanique du solide et des matériaux

Les ouvrages *de base* introduisent de manière simple avec un formalisme très léger les concepts fondamentaux de la Mécanique du solide et de la Science des matériaux.

S'il ne faut lire qu'un ouvrage, c'est celui de Gordon, *Structures et Matériaux*. En seconde position viennent les deux tomes *Matériaux* de Ashby et Jones, *Propriétés et applications* et *Matériaux, microstructure et mise en œuvre*. En troisième position du tiercé les deux tomes *Elasticité et Plasticité* et *Comportement mécanique des matériaux* de François, Zaoui et Pineau, certes plus approfondis et plus *calculatoires* mais toujours très *physiques*.

Ouvrages de base

- Means, *Stress and Strain* (basic concepts for geologists), Springer Verlag (1976).
- J.E. Gordon, *Structures et Matériaux*, Pour la Science Belin (1994).
- M.F. Ashby, D.R.H. Jones, *Matériaux : Propriétés et applications*, Dunod (1996).

Pour en savoir plus

- S.Timoshenko, *Théorie de l'élasticité*, Béranger (1948).
- S.Timoshenko, *Résistance des matériaux* (tomes I et II) Béranger (1947).
- L.Landau, E.Lifchitz, *Théorie de l'élasticité*, Editions MIR (1990).
- E. Dieulesaint, D. Royer, *Ondes élastiques dans les solides*, Masson (1974).
- D.François, A. Pineau, A. Zaoui, *Élasticité et Plasticité*, Hermès (1992).
- J. Mandel, *Propriétés mécaniques des matériaux* Eyrolles (1978).
- M.F. Ashby, D.R.H. Jones, *Matériaux : Microstructure et mise en forme*, Dunod (1996).
- D.François, A. Pineau, A. Zaoui, *Comportement mécanique des matériaux*, Hermès (1992).
- C.Bathias, J.P. Bâillon, *La fatigue des matériaux et des structures*, Hermès (1997).